

CONTROL ÓPTIMO ADAPTATIVO DE UN SISTEMA MULTIVARIABLE APLICADO A
UN PUENTE GRÚA

LEONEL ZULETA LARGO.
OSCAR FELIPE VELÁSQUEZ ALBINO.



PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA.
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA.
RISARALDA-PEREIRA.
2014

CONTROL ÓPTIMO ADAPTATIVO DE UN SISTEMA MULTIVARIABLE APLICADO A
UN PUENTE GRÚA

LEONEL ZULETA LARGO.
OSCAR FELIPE VELÁSQUEZ ALBINO.

Trabajo de grado para optar al título de Ingeniero Electricista

Director
Ph.D. Eduardo Giraldo Suárez

PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA.
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA.
RISARALDA-PEREIRA.
2014

DEDICADO

A mis padres, pues siempre estuvieron presentes apoyando mi formación académica y como ser humano de manera incondicional, a mis familiares y amigos que me han hecho crecer como persona.

Oscar Felipe Velásquez Albino.

DEDICADO

A mi padre Rigoberto que siempre estuvo junto a mi a pesar de la distancia.

Leonel Zuleta Largo.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Tecnológica de Pereira, por facilitarnos sus instalaciones, Laboratorio de Control E125 y la unidad 33-200 (Digital Pendulum Mechanical Unit).
Al Ingeniero Eduardo Giraldo Suárez por su apoyo incondicional.

Leonel Zuleta Largo.
Oscar Felipe Velásquez Albino.

ÍNDICE GENERAL

Índice general	VI
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	XI
Introducción	XII
1. Descripción y modelo matemático del sistema multivariable (Puente Grúa)	1
1.1. Objetivo	1
1.2. Introducción	1
1.3. Presentación y Características de la planta (puente grúa)	1
1.3.1. Información general del fabricante del puente grúa	4
1.3.2. Parámetros entregados por el fabricante	5
1.4. Modelo no lineal del sistema	6
1.5. Ecuaciones de estado a partir de los datos del fabricante	7
1.6. Modelo linealizado en espacio de estado en tiempo discreto	8
1.6.1. Ecuaciones de estado a partir de los datos del fabricante en tiempo discreto	10
2. Diseño de controladores clásicos para un sistema multivariable	11
2.1. Objetivo	11
2.2. Introducción	11
2.3. Diseño de controladores polinomiales para el sistema multivariable	11
2.3.1. Diseño de controladores polinomiales para sistemas de una entrada y una salida	12
2.3.2. Implementación de los controladores para el control de la posición de la plata	21
2.4. Diseño de controladores por espacio de estados para el sistema multivariable	27
2.4.1. Ganancia en lazo cerrado	28
2.4.2. Reubicación de polos con ganancia en lazo cerrado	30
2.4.3. Control por acción integral	32
2.4.4. Implementación de controladores por espacio de estados	33
2.5. Control del sistema multivariable	36
2.5.1. Controlador con dos grados de libertad	37

3. Control adaptativo y control óptimo adaptativo	39
3.1. Objetivo	39
3.2. Introducción	39
3.3. Estimación en línea	41
3.3.1. Identificación del sistema fuera de línea	43
3.3.2. Método de mínimos cuadrados	44
3.3.3. Método mínimos cuadrados recursivo	47
3.3.4. Mínimos Cuadrados con factor de olvido	49
3.4. Implementación de controladores adaptativos	50
3.5. Control óptimo	51
3.6. Control óptimo cuadrático <i>LQR</i>	53
3.6.1. Control óptimo cuadrático empleando multiplicadores de Lagrange	56
3.6.2. Control óptimo cuadrático en estado estacionario	62
3.7. Control óptimo cuadrático <i>LQR</i> adaptativo	65
3.7.1. Control con <i>Q</i> adaptativo para el enfoque por espacio de estados	67
3.7.2. Control con ganancia óptima de realimentación para el enfoque de controlador con dos grados de libertad	68
4. Resultados	69
4.1. Objetivo	69
4.2. Introducción	69
4.3. Resultados para controladores fijos	72
4.4. Resultados para controladores adaptativos	78
4.5. Resultados de controladores óptimos fijos y adaptativos	84
4.6. Resultados de la implementación sobre la planta	95
5. Conclusiones	101
Bibliografía	104
A. Fundamentos de control digital	106
A.1. Transformada <i>Z</i>	106
A.1.1. Definición de la transformada <i>Z</i>	106
A.2. Controlabilidad	107
A.3. Observabilidad	107
A.4. Operadores de desplazamiento	108
A.5. Formas canónicas para ecuaciones en el espacio de estado en tiempo discreto	109
A.5.1. Forma canónica controlable	109
A.5.2. Forma canónica observable	110
A.5.3. Forma canónica diagonal	110
A.5.4. Forma canónica Jordan	111

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Foto de un puente grúa real [1].	2
1.2. Foto del puente grúa a escala	3
1.3. Sensor de posición [15].	4
1.4. Sensores finales de carrera [15].	5
1.5. Diagrama del modelo físico de la planta, donde l es la longitud del péndulo, x la posición que puede alcanzar el carro, θ la apertura angular del péndulo y M_c la masa del caro.	6
1.6. Respuesta de la planta frente al escalón unitario.	7
2.1. Esquema del controlador en función del operador de desplazamiento q A.4.	14
2.2. Métodos de discretización de la componente integral del error	17
2.3. Esquema del controlador por modelo de referencia	18
2.4. Esquema para el controlador por reubicación de polos.	19
2.5. Esquema del controlador en función del operador z	23
2.6. Esquema de control por espacio de estados con observador.	28
2.7. Esquema por espacio de estados con observador y ganancia en lazo cerrado.	29
2.8. Esquema control por Reubicación de Polos con observador y ganancia en lazo directo.	30
2.9. Esquema control por Acción integral con observador.	32
2.10. Diagrama de bloques de un sistema de realimentación con una estructura de dos grados de libertad [4].	37
3.1. Sistema adaptativo con identificación de modelo (MIAS) [8]	40
3.2. Sistema adaptativo con modelo de referencia (MRAS) [9]	41
3.3. Estructura del modelo ARX [7]	42
3.4. Sistema a identificar con una entrada y una salida	43
3.5. Esquema identificación por Mínimos Cuadrados Recursivos [7].	49
3.6. Braquistocrono [2].	52
3.7. Sistema regulador óptimo basado en un índice de desempeño cuadrático.[5]	62
3.8. Diagrama de bloques sistema de seguimiento.[5]	65
4.1. Diagrama de bloques en Simulink para la simulación de los controladores fijos.	73

4.2. Respuesta controlador Modelo de Referencia fijo para posición frente a un impulso.	74
4.3. Respuesta de los controladores fijos para posición y angulo frente a un impulso, referencia de color rojo. Las combinaciones de los controladores para posición y ángulo corresponden a: azul (a) Modelo de Referencia y Paso Adelante respectivamente, verde (b) Modelo de Referencia y Reubicación de Polos respectivamente, cián (c) Paso Adelante y Paso Adelante respectivamente.	75
4.4. Respuesta de los controladores fijos para posición con una referencia sinusoidal de color rojo. las señales de los controladores para posición Modelo de Referencia en color azul, y Paso Adelante en color verde. .	76
4.5. Respuesta de los controladores fijos para posición y angulo con una referencia sinusoidal de color rojo. Las combinaciones de los controladores para posición y ángulo corresponden a: azul (a) Modelo de Referencia y Paso Adelante respectivamente, verde (b) Modelo de Referencia y Reubicación de Polos respectivamente, cián (c) Paso Adelante y Paso Adelante respectivamente.	77
4.6. Diagrama de bloques en Simulink para la simulación de los controladores adaptativos.	78
4.7. Respuesta de los controladores adaptativos para posición frente a una referencia impulso de color rojo. las señales de los controladores para posición PID en color azul, Reubicación de Polos en color verde y Reubicación de Polos en espacio de estados en color negro.	79
4.8. Respuesta de los controladores adaptativos para posición y angulo frente a un impulso.Las combinaciones de los controladores para posición y ángulo corresponden a: azul (a) PID y Reubicación de Polos respectivamente, verde (b) reubicación de polos y Reubicación de Polos respectivamente, cián (c) Reubicación de Polos por espacio de estados y Reubicación de Polos respectivamente.	80
4.9. Respuesta de los controladores adaptativos para posición con ajuste de parámetros al inicio de la adquisición de datos.las señales de los controladores para posición PID en color azul, Reubicación de Polos en color verde y Reubicación de Polos en espacio de estados en color negro.	81
4.10. Respuesta de los controladores adaptativos para posición con una referencia sinusoidal de color rojo. las señales de los controladores para posición PID en color azul, Reubicación de Polos en color verde y Reubicación de Polos en espacio de estados en color negro.	82

4.11. Respuesta de los controladores adaptativos para posición y angulo con señal de referencia sinusoidal de color rojo. Las combinaciones de los controladores para posición y ángulo corresponden a: azul (a) PID y Reubicación de Polos respectivamente, verde (b) reubicación de polos y Reubicación de Polos respectivamente, cián (c) Reubicación de Polos por espacio de estados y Reubicación de Polos respectivamente.	84
4.12. Diagrama de bloques en Simulink para la simulación de los controladores óptimos adaptativos.	85
4.13. Respuesta del controlador acción integral óptimo fijo para la posición y el ángulo.	87
4.14. Respuesta del controlador acción integral óptimo fijo para la posición y el ángulo, para una señal de referencia cuadrada.	88
4.15. Respuesta de los controladores adaptativos para posición y angulo para una señal de referencia escalón.	89
4.16. Respuesta de los controladores adaptativos para posición y angulo para una señal de referencia sinusoidal.	90
4.17. Respuesta de los controladores adaptativos para posición y angulo para bajas frecuencias.	91
4.18. Señal de control para el controlador optimo adaptativo por Reubicación de Polos y variación de la ganancia óptima K.	92
4.19. Respuesta del controlador óptimo adaptativo por Reubicación de Polos para la posición y el ángulo.	93
4.20. Respuesta del controlador óptimo adaptativo con acción integral para la posición y el ángulo.	94
4.21. Diagrama de bloques en Simulink para realizar control sobre la planta real.	95
4.22. Respuesta frente a un impulso de los controladores implementados en planta para control sobre posición.	96
4.23. Respuesta frente a una señal sinusoidal de los controladores implementados en planta para control sobre posición.	97
4.24. Parametros estimados en linea, para inicialización del vector theta en cero, random y con datos de la planta respectivamente	98
4.25. Respuesta frente a una señal sinusoidal de los controladores implementados en planta para control sobre posición y angulo.	99
4.26. Respuesta de los controladores reubicación de polos de cuarto y tercer orden frente a fuertes perturbaciones introducidas manualmente. . . .	100

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Parámetros de la planta dados por el fabricante [2].	5
2.1. Parámetros de un controlador digital incremental PID [3].	17

INTRODUCCIÓN

Actualmente se utilizan métodos de control clásicos los cuales requieren de un alto esfuerzo matemático por el espacio de soluciones que se genera con el fin de acotar la respuesta deseada y que en la mayoría de casos, aunque logran la solución del problema no es eficiente, dado al tiempo y otros recursos que se pierden en este proceso.

Para poder implementar un control óptimo se hace necesario conocer las ecuaciones y los parámetros del sistema, ya que el uso de los datos de la planta dados por el fabricante podrían generar resultados no muy precisos, dado a los defectos o desgaste que ocurren en el tiempo [5] [2].

Por otra parte, es necesario comprender que la gran mayoría de procesos a ser controlados son, de hecho sistemas no lineales y tampoco son estacionarios y sus características cambian en el tiempo o cuando el punto de operación varía. Estos cambios afectan los procesos de diferentes maneras que pueden ser ligeros y no afectarlos en gran medida, pero que en otros casos, podrían ser lo suficientemente significativos para hacer que el uso de controladores con los parámetros fijados previamente sean inaceptables o simplemente imposibles [3].

Es necesario pensar en controladores con la característica de adaptarse y modificar su comportamiento en cuanto las condiciones cambien (debido a las perturbaciones estocásticas), cuyo desarrollo es posible gracias al avance de nuevas herramientas y software [3].

Por lo anteriormente mencionado y vistas las necesidades que aún persisten en los sistemas de control utilizados en la actualidad, se pretende implementar técnicas de identificación sobre un controlador que permitan obtener un modelo a partir de los datos del sistema, así como de adaptarse a los diferentes cambios en el sistema real, cumpliendo con una buena aproximación dinámica del proceso, manteniendo las condiciones óptimas de funcionamiento del sistema cumpliendo con un conjunto de restricciones preestablecidas, que puede ser aplicado en general a sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, además de condiciones iniciales diferentes de cero.

En el presente documento se muestra el diseño de controladores polinomiales y por espacio de estados, con parámetros fijos y parámetros adaptativos, con los cuales se realiza control sobre un sistema multivariable (puente grúa).

1. DESCRIPCIÓN Y MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA MULTIVARIABLE (PUENTE GRÚA)

1.1. Objetivo

Describir la planta puente grúa y el modelo matemático de la planta física en tiempo continuo y en tiempo discreto, haciendo uso de la segunda ley de Newton.

1.2. Introducción

En este capítulo se presenta el sistema multivariable el puente grúa, sobre el cual se centrara este documento en los capítulos siguientes. Al inicio se realizará una breve descripción de un puente grúa y sus características en general, luego se presenta y describe la planta utilizada para la obtención de los resultados que se discuten en el capítulo 4 y finalmente se encuentra la representación matemática del modelo no lineal en tiempo continuo y el modelo linealizado en tiempo discreto del sistema, que será de utilidad durante los siguientes capítulos.

1.3. Presentación y Características de la planta (puente grúa)

Actualmente existen diversos diseños de grúas que se adaptan a los diferentes entornos en los que son requeridas. Es importante saber que éstos están conformados por unos equipos electromecánicos y una parte estructural. Cuando se hace mención a los equipos electromecánicos, normalmente, se refiere al polipasto, los testers y el sistema de electrificación. La parte estructural está conformada por las diferentes vigas del sistema, como lo son las viga puentes, vigas carrileras, columnas, etc.

Existen diferentes tipos de accionamiento en los polipastos pero todos tienen la misma finalidad, elevar una carga. Los polipastos pueden ser neumáticos, eléctricos o manuales, de cable o cadena. Las partes principales de los polipastos son: Gancho, cable o cadena, sistema de accionamiento (tambor), caja reductora, motor y/o trolley.

Puente Grúa: Grúa que consta de un elemento portador; formado por una o dos vigas móviles sobre raíles, apoyados en columnas o ménsulas a lo largo de dos paredes opuestas de su lugar de trabajo; sobre el que se desplaza el polipasto con los mecanismos elevadores, como el que se presentar en la figura 1.1 [1].



Figura 1.1: Foto de un puente grúa real [1].

En la Figura 1.2 se muestra una foto del modelo a escala del sistema real puente grúa, donde se implementarán los controladores *paso adelante* 2.3.1.1 , *PID* 2.3.1.2, *Modelo de referencia* 2.3.1.3 y *Reubicación de polos* 2.3.1.4, de los cuales se habla más ampliamente en el capítulo 2.

El modelo a escala del puente grúa es la unidad de la empresa FeedBack Instruments Ltd. Este sistema consiste en una barra montada en un carro que a su vez se desplaza sobre un riel cuando es impulsado por un motor de corriente continua a través de una banda. Para controlar la oscilación de la carga, el carro es impulsado hacia adelante y hacia atrás sobre el riel con finales de carrera ubicados a extremo y extremo del mismo, para limitar el movimiento horizontal del carro [2].



Figura 1.2: Foto del puente grúa a escala

En la figura 1.2 se muestra el modelo de puente grúa el cual hace uso de encoders incrementales de naturaleza óptica para determinar la posición del y el ángulo del péndulo. Esta lectura de la posición se realiza por medio de dos haz de luz, emitidos desde las fuentes A que se muestra de color rojo y B que se muestra en color azul a través de un disco con ranuras, como se ilustra en la figura 1.3 a través de un disco con ranuras. Las ranuras tienen una diferencia de fase, de modo que las señales eléctricas de los receptores (A y B) son ondas rectangulares con una diferencia de fase. El signo de la diferencia de fase permite conocer la dirección de movimiento del carro [2].

1.3.1. Información general del fabricante del puente grúa

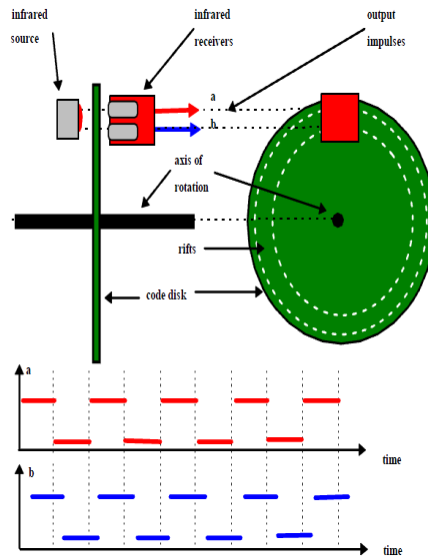


Figura 1.3: Sensor de posición [15].

La señal de control se envía desde el computador hacia el conversor de la tarjeta de adquisición de datos. La salida del conversor Digital/Análogo (**D/A**) va a la entrada del amplificador que impulsa el motor de corriente continua. La interfaz del amplificador y codificador se encuentran en el bloque de control del péndulo. La cual está equipada con dos interruptores: el interruptor principal de alimentación y el interruptor para cortar la potencia de motor de corriente continua. En los extremos del riel hay dos finales de carrera que cortan la alimentación del motor cuando el carro alcanza estos puntos [2].

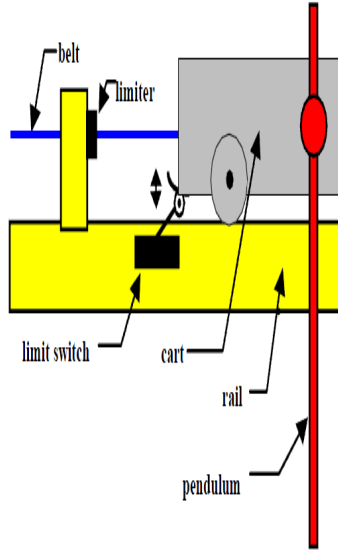


Figura 1.4: Sensores finales de carrera [15].

1.3.2. Parámetros entregados por el fabricante

Los parámetros presentados en la tabla 1.1 fueron tomados de [2]. En base a estos parámetros se realizara el desarrollo matemático y diseño de los controladores fijos, ya que la identificación para el sistema se hace fuera de línea, más adelante se hará la identificación en línea del sistema con el algoritmo de mínimos cuadrados capítulo 3.

Parámetro	Valor
Límites del riel	$\pm 0,5 [m]$
Gravedad (g)	$9,81 [\frac{m}{s^2}]$
Distancia del eje de rotación al centro de masa (l)	$0,3434 [m]$
Masa del carro (M_c)	$1,12 [Kg]$
Masa de la carga (ml)	$0,11 [Kg]$
Magnitud de la fuerza de control	$17,0 [N]$
Momento de inercia (J)	$0,0136 [Kg m^2]$
Coeficiente de fricción de rotación (fp)	$0,007 [\frac{Kg m^2}{rad.s}]$
Coeficiente de fricción del carro (fc)	$0,05 [\frac{N.s}{m}]$

Tabla 1.1: Parámetros de la planta dados por el fabricante [2].

1.4. Modelo no lineal del sistema

En la figura 1.5 se muestra el diagrama del modelo físico de la planta, el cual se puede resolver usando la segunda ley de Newton ($\sum F_x = m \cdot a$), como no es de interés para este trabajo el desarrollo matemático, a continuación se presentan las ecuaciones que describen el sistema (1.1), (1.2), el desarrollo matemático en más detalle se puede encontrar en [2, capítulo 1].

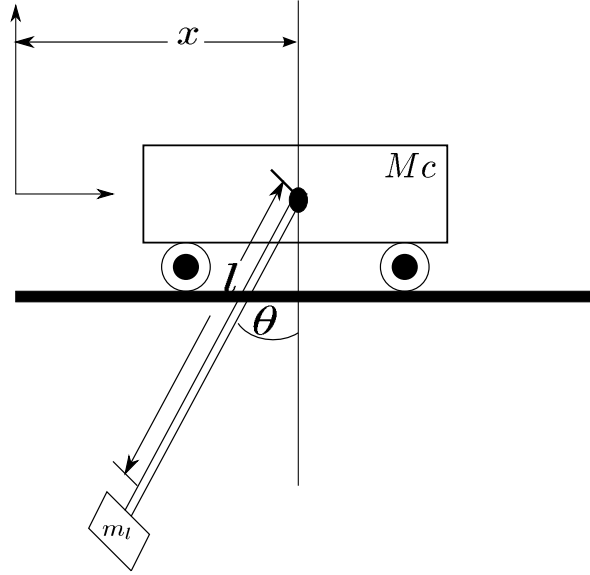


Figura 1.5: Diagrama del modelo físico de la planta, donde l es la longitud del péndulo, x la posición que puede alcanzar el carro, θ la apertura angular del péndulo y M_c la masa del carro.

$$U(t) - F_r = (M_c + m_l)\ddot{x} + m_l l(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta) \quad (1.1)$$

Donde F_r es la fricción rotacional

$$F_r = f_c \dot{x}$$

$$(J + m_l l^2)\ddot{\theta} + f_p \dot{\theta} + m_l l g \sin \theta - m_l l \cos \theta \ddot{x} = 0 \quad (1.2)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) describen el modelo del sistema, como se puede apreciar el sistema de ecuaciones es no lineal, ya que ninguna de las variables es independiente y no podría hacer un despeje normal sin la ayuda de otras herramientas matemáticas. Los parámetros del sistema dados por el fabricante se encuentran en la tabla 1.1

Para observar el comportamiento del sistema no lineal, se montaron las ecuaciones (1.1) y (1.2) en simulación y se observó su respuesta frente a una perturbación del

tipo escalón unitario, los resultados se muestran en la figura 1.6, cabe aclarar que para un sistema no lineal el punto de operación se puede hallar en cualquier parte.

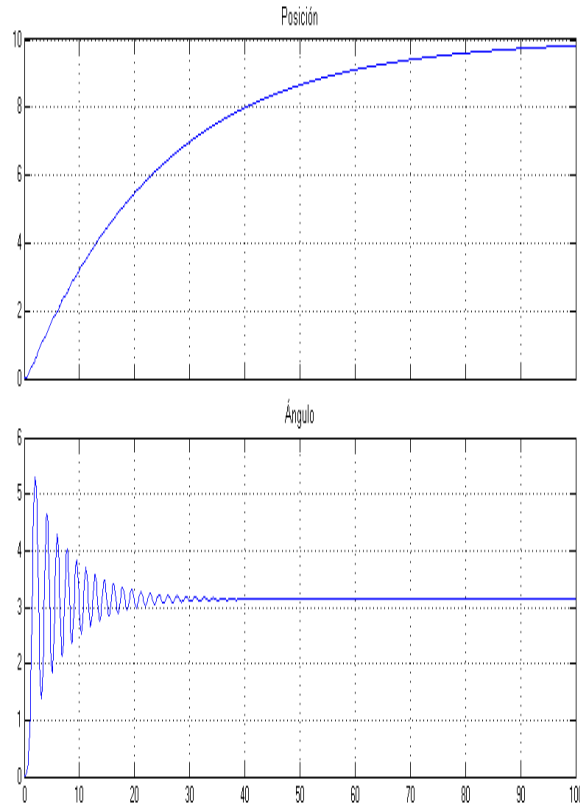


Figura 1.6: Respuesta de la planta frente al escalón unitario.

1.5. Ecuaciones de estado a partir de los datos del fabricante

Siempre es conveniente, al analizar un sistema no lineal, comenzar linealizando el sistema alrededor de algún punto de equilibrio y estudiar el sistema resultante. Sin embargo la linealización sólo predice el comportamiento local, no sirve para estudiar el comportamiento lejos del punto de operación.

Del modelo matemático se puede obtener el sistema en espacio de estados en tiempo continuo. Linealizando las ecuaciones no lineales (1.1) y (1.2), en [2] hacen las aproximaciones necesarias para llegar al modelo en espacio de estados. Definiendo las variables de estado para el puente grúa:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\ \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_3 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \theta \\
\dot{x}_2 &= \dot{\theta} = x_4 \\
\dot{x}_4 &= \ddot{\theta}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ v_{puente} \\ \omega_{pendulo} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Posición del carro} \\ \text{Posición del péndulo} \\ \text{Velocidad del carro} \\ \text{Velocidad del péndulo} \end{array}$$

Finalmente queda el sistema en espacio de estados:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u(t) \\
y(t) &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u(t)
\end{aligned}$$

Donde las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} son las matrices que describen al sistema en tiempo continuo y corresponden a la ecuación que se muestra [2]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4473 & -0.0425 & -0.0085 \\ 0 & -14.5813 & 0.0604 & -0.2758 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.8501 \\ 1.2084 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.3)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.4)$$

1.6. Modelo linealizado en espacio de estado en tiempo discreto

Por facilidad se utiliza el modelo en espacio de estados en tiempo continuo para hallar el sistema en espacio de estados en tiempo discreto, usando el *toolbox de control* de MATLAB, que facilita estos cálculos, si alguien desea discretizar el sistema a partir del sistema en tiempo continuo, se le recomienda ver [2, A.9.2].

Por lo tanto, lo primero que hay que hacer es convertir el sistema de ecuaciones de tiempo continuo a tiempo discreto. Para ello, utilizaremos la función de Matlab `c2d`. La función `c2d` convierte las matrices que definen un sistema continuo en variables de estado, en uno discreto, asumiendo una frecuencia y un método de muestreo

determinado. Para usar `c2d`, se debe especificar cuatro matrices de variables de estado $[A,B,C,D]$ y el periodo o tiempo de muestreo (T_m en sec/muestra).

Periodo de muestreo: *En el contexto del control y las comunicaciones, el muestreo significa que una señal análoga es reemplazada por una secuencia de números, la cual representa los valores de la señal en ciertos instantes [2].* La selección apropiada del periodo de muestreo es una decisión muy importante en sistemas controlados por computador. Los tiempos cuando las señales medidas se convierten a la forma digital son llamados los instantes de muestreo; el tiempo entre las muestras sucesivas se llama el **período de muestreo**. Un período de muestreo demasiado largo hará imposible reconstruir la señal en tiempo continuo. La opción del período de muestreo depende en gran medida del propósito del sistema. Es útil caracterizar el período de muestreo con una variable que sea de libre dimensión y que tenga una buena interpretación física. Para los sistemas oscilatorios, es natural normalizar con respecto al período de oscilación; para los sistemas no oscilatorios, el tiempo de subida es un factor natural de la normalización. Ahora se introduce N , como el número de períodos de muestreo por tiempo de subida, donde el tiempo T_m , será el periodo de muestreo, se tiene la ecuación que determina la selección del periodo de muestreo.

$$N = \frac{T_m}{h} \quad (1.5)$$

De lo anteriormente expuesto surge el criterio de Shannon, el cual expresa que es conveniente elegir una frecuencia de Shannon ($f_{sh} = f_m/2$) entre 5 y 10 veces superior a la frecuencia de corte del filtro antialiasing. A su vez, el filtro antialiasing debe tener un ancho de banda unas 10 veces mayor que el ancho de banda del sistema para no alterar significativamente el margen de fase del sistema comprometiendo la oscilación o incluso la estabilidad. Entonces utilizando la ecuación (1.5) y corroborando el criterio de Shannon, se supondrá que el tiempo de establecimiento en lazo cerrado es muy cercano al propuesto por el diseño, se obtendría un tiempo de muestreo de $T_m = 50ms$ [2] [4].

Finalmente se tienen definidas todas las condiciones para pasar de tiempo continuo a tiempo discreto el sistema, como ya se mencionó antes el MATLAB permite hacer esto de forma muy rápida, solo usando el comando `c2d`, `c2d(ss(A, B, C, D), T_m)` que dará como resultado las matrices A' , B' , C' y D' , a continuación se presentan de la forma:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \mathbf{A}'x + \mathbf{B}'u(k) \\ y &= \mathbf{C}'x + \mathbf{D}'u(k) \end{aligned}$$

1.6.1. Ecuaciones de estado a partir de los datos del fabricante en tiempo discreto

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.006 & 0.0499 & 0 \\ 0 & 0.9819 & -0.0001 & 0.0494 \\ 0 & -0.0221 & 0.9979 & -0.0010 \\ 0 & -0.7196 & -0.0030 & 0.9683 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 0.0015 \\ 0.0424 \\ 0.0596 \end{bmatrix} U(k) \quad (1.6)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(k) \quad (1.7)$$

A partir del modelo en espacio de estados se pueden obtener las funciones de transferencia del sistema.

Función de transferencia que representa la posición del sistema respecto a $U(Z)$:

$$\frac{X(Z)}{U(Z)} = \frac{0.001061z^3 - 0.001012z^2 - 0.001023z + 0.001047}{z^4 - 3.948z^3 + 5.88z^2 - 3.917z + 0.9842} \quad (1.8)$$

Función de transferencia que representa el ángulo del sistema respecto a $U(z)$:

$$\frac{\Theta(Z)}{U(Z)} = \frac{0.001498z^3 - 0.001506z^2 - 0.001482z + 0.00149}{z^4 - 3.948z^3 + 5.88z^2 - 3.917z + 0.9842} \quad (1.9)$$

2. DISEÑO DE CONTROLADORES CLÁSICOS PARA UN SISTEMA MULTIVARIABLE

2.1. Objetivo

Definir y enunciar las herramientas necesarias para el entendimiento de los controladores a usar y la realización del diseño de controladores para el sistema del puente grúa.

2.2. Introducción

El propósito de este capítulo es otorgar las herramientas necesarias para la comprensión de los controladores utilizados en este trabajo, mostrando los aspectos más relevantes para realizar el diseño de controladores clásicos en sistemas de control digital aplicados a un sistema de una entrada y una salida (**SISO**), una vez entendido el diseño de los distintos controladores se procederá a aplicar este principio a un sistema multivariable en general (**MIMO**), posteriormente se realiza el enfoque al sistema de interés, el puente grúa.

2.3. Diseño de controladores polinomiales para el sistema multivariable

La finalidad del diseño de controladores polinomiales es lograr llevar al sistema a que responda de una manera determinada, para este propósito es necesario ajustar el sistema de tal manera que se logre una respuesta deseada, en este orden de ideas será necesario entonces conocer las ecuaciones que modelan el sistema como se ha visto previamente en el capítulo 1 para el caso del puente grúa. Como podrá verse en este capítulo para cada uno de los métodos de control, se consigue llevar al sistema a una respuesta deseada como es el caso de reubicación de polos, donde se compara el polinomio característico con un polinomio deseado o para

La primera parte de este capítulo consiste en diseñar controladores polinomiales que servirán para realizar control sobre la posición lo cual corresponde a un sistema de una entrada y una salida (**SISO**). La subsección siguiente muestra cómo se realizará la implementación sobre el modelo, de los diseños vistos anteriormente con controladores de cuarto y segundo orden para la planta. La siguiente sección tiene como objeto el diseño del control por espacio de estados y desarrollar un observador

de las variables de estado del sistema. Una vez se conoce el diseño mediante las diferentes técnicas de control, se desarrolla el control para el sistema multivariable mediante el enfoque del control con dos grados de libertad como se explica al final del capítulo.

2.3.1. Diseño de controladores polinomiales para sistemas de una entrada y una salida

En el diseño de controladores polinomiales se hace necesario conocer la ecuación Diofantina (ésta ecuación debe su nombre a Diofanto de Alejandría). Considérese el sistema definido por la función de transferencia:

$$\frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{B(Z)}{A(Z)} \quad (2.1)$$

La función de transferencia pulso relaciona la transformada z de la salida en los instantes de muestreo con la correspondiente entrada muestreada. Los polinomios $A(z)$ y $B(z)$ son polinomios coprimos, es decir que no existe una cancelación entre polos y ceros en la función de transferencia pulso, o no tienen factores en común. $A(z)$ debe ser un polinomio mónico, es decir que el coeficiente del término de mayor grado es uno, la representación para los polinomios $A(z)$ y $B(z)$ son de la forma:

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (2.2)$$

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n \quad (2.3)$$

Donde los coeficientes a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) corresponden al polinomio del denominador y los coeficientes b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) corresponden al polinomio del numerador de la función de transferencia que se muestra en la ecuación (2.1).

Entonces existen polinomios únicos de grado $(n-1)$, $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ tales que la ecuación Diofanta representada por (2.4):

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = D(z) \quad (2.4)$$

donde:

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^{n-1} + \alpha_1 z^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} z + \alpha_{n-1} \quad (2.5)$$

$$\beta(z) = \beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \dots + \beta_{n-2} z + \beta_{n-1} \quad (2.6)$$

Siendo $D(z)$ un polinomio estable de grado $(2n-1)$, como se muestra:

$$D(z) = d_0 z^{2n-1} + d_1 z^{2n-2} + \dots + d_{2n-2} z + d_{2n-1} \quad (2.7)$$

La ecuación Diofantina se puede resolver para $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ mediante el uso de la matriz de Sylvester E de $2n * 2n$, la cual se define en términos de los coeficientes de los polinomios coprimos $A(z)$ y $B(z)$, como sigue:

$$E = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{n-1} & \cdots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_1 & \vdots & \cdots & \vdots & b_1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Para que la matriz de Sylvester E sea no singular, se debe tener en cuenta que $A(z)$ y $B(z)$ deben ser coprimos y que $A(z)$ debe ser mónico. Se definen entonces los vectores x y b tales que:

$$b = \begin{bmatrix} d_{2n-1} \\ d_{2n-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_{2n-1} \\ \alpha_{2n-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La ecuación de la forma $Ex = b$ se resuelve al multiplicar por la matriz inversa de Sylvester E^{-1} a ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$x = E^{-1}b \quad (2.11)$$

2.3.1.1. Control mediante la técnica de un paso adelante

Se muestra el diseño de un controlador paso adelante cuyo objetivo es hacer que el sistema alcance la referencia en un paso, para ello será necesario hallar la función de

transferencia en lazo cerrado e igualarla al operador de desplazamiento, tal como se muestra a continuación:

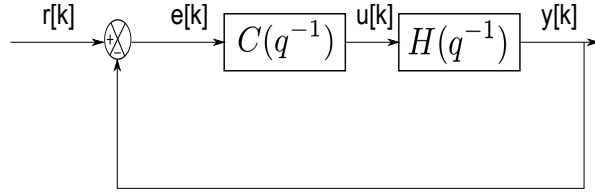


Figura 2.1: Esquema del controlador en función del operador de desplazamiento q [A.4](#).

Donde: $r[k]$: es la señal de referencia $e[k]$: es el error $y[k]$: es la variable a controlar $u[k]$: es la señal de control $H(q^{-1})$: es la función de transferencia en lazo abierto del sistema $C(q^{-1})$: es la forma del controlador

Para el caso del puente grúa, la variable que se desea controlar inicialmente es la posición, se dice entonces que $y[k]$ es la variable correspondiente a la posición del carro sobre el riel, luego del esquema que se muestra en la Figura 2.1, se tiene que:

$$y[k] = H_{lc}(q^{-1}) \cdot r[k] \quad (2.12)$$

Donde $H_{lc}(q^{-1})$ es la función de transferencia en lazo cerrado del sistema en función del operador de desplazamiento q ver apéndice [A.4](#).

$$r[k] = y[k + 1] \quad (2.13)$$

Aplicando el operador de desplazamiento q

$$r[k] = qr[k] \Rightarrow y[k] = \frac{1}{q}r[k] \quad (2.14)$$

se ve que la función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$H_{lc}(q^{-1}) = q^{-1} \quad (2.15)$$

Del esquema del controlador de la figura 2.1 se tiene que:

$$y[k] = H(q^{-1})u[k] \quad (2.16)$$

$$u[k] = C(q^{-1})e[k] \quad (2.17)$$

$$e[k] = r[k] - y[k] \quad \text{Señal del error} \quad (2.18)$$

Donde la salida del sistema es la ecuación (2.16), la señal de control la ecuación (2.17) y la señal del error corresponde a la ecuación (2.18).

Reemplazamos (2.17) y (2.18) en (2.16) se llega a:

$$y[k] = \frac{H(q^{-1}) * C(q^{-1})}{1 + H(q^{-1}) * C(q^{-1})} * r[k] \quad (2.19)$$

Conociendo la función de transferencia en lazo cerrado en función del operador de retardo q^{-1} , comparamos con la ecuación (2.15):

$$\frac{H(q^{-1}) * C(q^{-1})}{1 + H(q^{-1}) * C(q^{-1})} = H_{lc}(q^{-1}) = q^{-1} \quad (2.20)$$

De la ecuación (2.20) se desconoce el controlador, por lo tanto despejando $C(q^{-1})$ se tiene:

$$C(q^{-1}) = \frac{q^{-1}}{(1 - q^{-1}) * H(q^{-1})} \Rightarrow C(q^{-1}) = \frac{1}{(q - 1) * H(q)} \quad (2.21)$$

Para un sistema de segundo orden la función de transferencia del sistema es de la forma:

$$H(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0q + b_1}{q^2 + a_1q + a_2} \quad (2.22)$$

Reemplazando (2.22) en la ecuación (2.21) se obtiene:

$$C(q) = \frac{A(q)}{(q^{-1})B(q)} = \frac{q^2 + a_1q + a_2}{(q - 1)(b_0q + b_1)} \quad (2.23)$$

Realizando las operaciones se obtiene la forma del controlador:

$$C(q^{-1}) = \frac{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}}{b_0 + (b_1 - b_0)q^{-1} + b_1q^{-2}} \quad (2.24)$$

Reemplazando (2.24) en la ecuación (2.17) se tiene:

$$u[k] = \frac{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}}{b_0 + (b_1 - b_0)q^{-1} + b_1q^{-2}} e[k] \quad (2.25)$$

Realizando las operaciones, despejando la señal de control y reemplazando la ecuación (2.18) en (2.25), se obtiene la señal de control:

$$u[k] = \left(\frac{1}{b_0} \right) [(r[k] - y[k]) + a_1(r[k+1] - y[k+1]) + \dots + a_2(r[k+2] - y[k+2]) + (b_0 - b_1)u[k-1] + (b_1)u[k-2]] \quad (2.26)$$

2.3.1.2. Control mediante un controlador PID basado en el método de la asignación de polos

Para obtener una versión digital del controlador, debemos discretizar la integral y derivar los componentes de la ecuación [3] en tiempo continuo :

$$u[k] = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_1} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (2.27)$$

La manera más sencilla de aproximar la integral es realizando la sumatoria de tal forma que podamos aproximar la función en tiempo continuo por periodos de muestreo de la función constante.

Si la señal en tiempo continuo es discretizada usando la función escalón o mediante líneas, pueden utilizarse el método rectangular o de diferencias hacia adelante (*FRM*, *forward rectangular method*), el método rectangular o de diferencias hacia atrás (*BRM*, *back rectangular method*) o usando un método más aproximado donde se reemplaza la señal de tiempo continuo por secciones de línea conocido como método trapezoidal (*aproximación bilineal o de tustin*), como se muestran en la figura [2.3.1.2](#)

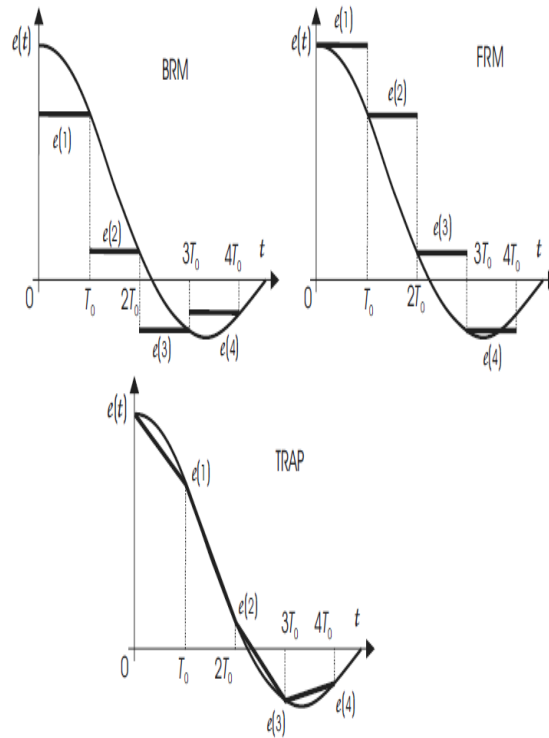


Figura 2.2: Métodos de discretización de la componente integral del error .[3]

La forma general del **controlador PID** en tiempo discreto, es como se muestra en la ecuación (2.28)[3].

$$u(k) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + u(k-1) \quad (2.28)$$

Reemplazando los parámetros individuales de la tabla 2.3.1.2 en la ecuación (2.28), obtenemos las ecuaciones procedentes de la discretización mediante los tres diferentes métodos de aproximación de la componente de la integral.

Controlador	FRM	BRM	TRAP
q_0	$K_p \left(1 + \frac{T_D}{T_0}\right)$	$K_p \left(1 + \frac{T_D}{T_1} + \frac{T_D}{T_0}\right)$	$K_p \left(1 + \frac{T_0}{2T_1} + \frac{T_D}{T_0}\right)$
q_1	$-K_p \left(1 - \frac{T_0}{T_1} + \frac{2T_D}{T_0}\right)$	$-K_p \left(1 + \frac{2T_D}{T_0}\right)$	$-K_p \left(1 - \frac{T_0}{2T_1} + \frac{2T_D}{T_0}\right)$
q_2	$-K_p \left(\frac{T_0}{T_1}\right)$	$K_p \left(\frac{T_0}{T_1}\right)$	$K_p \left(\frac{T_0}{T_1}\right)$

Tabla 2.1: Parámetros de un controlador digital incremental PID [3].

Usualmente en términos del posicionamiento, estos algoritmos son conocidos como absolutos o como algoritmos de posición para un controlador PID. Las ecuaciones obtenidas a través de estos métodos son conocidas como algoritmos no recurrentes, donde todos los valores anteriores del error $e[k-i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, deben ser conocidos para calcular la integral y para la acción del controlador [3].

$$C[z] = \frac{c_1 z^{-2} + c_2 z^{-1} + c_3}{1 - z^{-1}} \quad (2.29)$$

Donde c_1 , c_2 y c_3 son los coeficientes del controlador PID de la ecuación (2.29).

2.3.1.3. Control por modelo de referencia

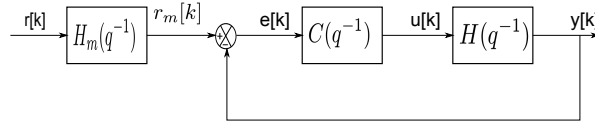


Figura 2.3: Esquema del controlador por modelo de referencia

Del esquema del controlador de la figura 2.3 se tiene que:

$$y[k] = H_{lc}(q^{-1})r_m[k] \quad (2.30)$$

$$u[k] = C(q^{-1})e[k] \quad (2.31)$$

$$e[k] = r_m[k] - y[k] \quad (2.32)$$

$$r_m[k] = H_m(q^{-1})r[k] \quad (2.33)$$

En donde la ecuación (2.30) es la salida del sistema (posición), la señal de control corresponde a la ecuación (2.31), la señal del error se describe en la ecuación (2.32) y la señal de referencia teniendo en cuenta el modelo se describe en la ecuación (2.33). El bloque correspondiente a $H_m(q^{-1})$ es el modelo de referencia, el cual debe cumplir las siguientes condiciones [4]:

1. El modelo debe ser estable.
2. La ganancia unitaria del modelo debe ser igual a uno.
3. El orden del modelo debe ser menor o igual al orden del sistema.

Escogiendo un modelo de referencia de segundo orden de manera arbitraria que cumpla con las condiciones anteriores:

$$H_m(z) = \frac{z + 0.5}{z^2 + 0.3z + 0.2} \quad (2.34)$$

Se demuestra a continuación que el modelo escogido cumple las condiciones:

1. El modelo es estable.

$$\begin{aligned} & -1.6094 + j3.82 \\ & -1.6094 - j3.82 \end{aligned}$$

2. La ganancia unitaria del modelo es igual a uno:

$$H_m(z)|_{z=1} = 1 \quad (2.35)$$

3. El modelo de referencia escogido es de segundo orden, el sistema es de cuarto orden. Se cumple entonces que el orden del modelo sea menor que el orden del sistema.

2.3.1.4. Control por reubicación de polos

La técnica de control por reubicación de polos, conocida también como realimentación de variables de estado permite diseñar el comportamiento global del sistema, de tal manera que el sistema en lazo cerrado tenga los polos en una posición específica, la cual es indicada en el diseño. Este es uno de los métodos fundamentales para los ingenieros de control [5, pág. 377]. Los conceptos de controlabilidad y observabilidad, introducidos por R. E. Kalman, son clave en el control óptimo de sistemas multivariable, particularmente el concepto de controlabilidad es la base para solucionar el problema de ubicación de polos, se dice que: si el sistema es de estado completamente controlable, entonces es posible seleccionar los polos en lazo cerrado deseados en el plano z (o las raíces de la ecuación característica) y se podrá diseñar el sistema que proporcione estos polos en lazo cerrado. El método de diseño de ubicar los polos en lazo cerrado en localizaciones deseadas en el plano z , se conoce como técnica de diseño de ubicación de polos; es decir en dicha técnica se realimentan todas las variables de estado de tal forma que todos los polos del sistema en lazo cerrado quedan ubicados en las localizaciones deseadas, sin embargo, quizá no todas las variables de estado puedan ser medidas [5, pág. 377].

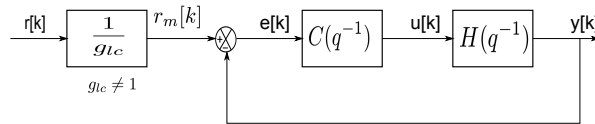


Figura 2.4: Esquema para el controlador por reubicación de polos.

El esquema que se muestra en la figura 2.4 corresponde a un controlador por reubicación de polos, donde:

$r[k]$: es la señal de referencia $r_m[k]$: es la señal de referencia con la ganancia en lazo cerrado g_{lc} : es la ganancia en lazo cerrado $e[k]$: es el error $y[k]$: es la variable a controlar $u[k]$: es la señal de control $H(q^{-1})$: es la función de transferencia en lazo abierto del sistema $C(q^{-1})$: es la forma del controlador

Para el modelo de segundo orden

$$H(z) = \frac{b_0z + b_1}{z^2 + a_1z + a_2} \quad (2.36)$$

$$C(z) = l_0z + l_1p_0z^2 + p_1z + p_2 \quad (2.37)$$

Donde la función de transferencia en lazo cerrado esta dada por:

$$H_{lc}(z) = \frac{C(z)H(z)}{1 + C(z)H(z)} \quad (2.38)$$

Reemplazando (2.36) y (2.37) en (2.38) se tiene:

$$H_{lc}(z) = \frac{l_0z + l_1)(b_0z + b_1)}{(p_0z^2 + p_1z + p_2)(z^2 + a_1z + a_2) + (l_0z + l_1)(b_0z + b_1)} \quad (2.39)$$

El denominador de la función de transferencia en lazo cerrado es el polinomio característico del sistema, donde las variables desconocidas del controlador son p_0, p_1, p_2, l_0, l_1 .

El objetivo del control por reubicación de polos es, como se ha mencionado anteriormente, lograr ubicar los polos del sistema en lazo cerrado en una posición especificada por el diseñador, de esta manera escogiendo los polos que se consideren y que cumplan con el criterio del círculo unitario, que coincidan para el sistema del orden especificado, la forma general del polinomio deseado es $z^n + d_1z^{n-1} + \dots + d_nz^0$ (siendo n el orden del sistema).

Para el caso de un sistema de segundo orden se tienen los coeficientes del polinomio deseado d_1, d_2, d_3, d_4 comparando el polinomio característico con el polinomio deseado y luego despejando fe forma matricial $Ax = b$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_1 & b_0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ l_0 \\ l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 \\ d_2 - a_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Se resuelve el sistema mostrado en (2.40) para hallar los valores desconocidos.

$$g_{lc} = H_{lc}(z)|_{(z=1)} = \frac{C(1)H(1)}{1 + C(1)H(1)} \quad \text{Ganancia del sistema en lazo cerrado} \quad (2.41)$$

El controlador en función del operador de retardo q^{-1} :

$$C(q^{-1}) = \frac{l_0 q^{-1} + l_1 q^{-2}}{p_0 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}} \quad (2.42)$$

Reemplazando la ecuación (2.58) en la señal de control (2.43) finalmente se tiene (2.44)

$$u[k] = C(q^{-1}) \left[\left(\frac{1}{g_{lc}} r[k] \right) - y[k] \right] \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} u[k] = & -p_1 u[k-1] - p_2 u[k-2] + l_0 \left[\left(\frac{1}{g_{lc}} r[k-1] \right) - y[k-1] \right] \\ & + l_1 \left[\left(\frac{1}{g_{lc}} r[k-2] \right) - y[k-2] \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.3.2. Implementación de los controladores para el control de la posición de la plata

Como se vio en el primer capítulo 1 se obtuvo la función de transferencia que representa la posición (2.45) y la función de transferencia que representa el ángulo (2.46), en tiempo discreto para un tiempo de muestreo de 0.05:

$$\frac{X(Z)}{U(Z)} = \frac{0.001061z^3 - 0.001012z^2 - 0.001023z + 0.001047}{z^4 - 3.948z^3 + 5.88z^2 - 3.917z + 0.9842} \quad (2.45)$$

$$\frac{\Theta(Z)}{U(Z)} = \frac{0.001498z^3 - 0.001506z^2 - 0.001482z + 0.00149}{z^4 - 3.948z^3 + 5.88z^2 - 3.917z + 0.9842} \quad (2.46)$$

Inicialmente se hará control sobre la posición (2.45), la función de transferencia en tiempo discreto se puede representar en la forma canónica controlador A.5.1

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9481 & -5.8805 & 3.9166 & -0.9842 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.47)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0011 & -0.0010 & -0.0010 & 0.0010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \\ x_4[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u[k] \quad (2.48)$$

Este es el modelo con parámetros fijos, que representa la variable de posición de la planta en tiempo discreto. En esta sección se mostrarán los controladores desarrollados para la implementación sobre el puente grúa. Para el control de la posición se determina que el modelo matemático que representa la planta debe ser de cuarto orden, con el fin de obtener una mejor representación dinámica del sistema.

2.3.2.1. Control de la posición mediante la técnica de un paso adelante

La función de transferencia en lazo cerrado como se vio anteriormente en la ecuación (2.20), y el control como se vio previamente en la ecuación (2.21).

$$H_{lc}(q^{-1}) = \frac{H(q^{-1}) * C(q^{-1})}{1 + H(q^{-1}) * C(q^{-1})}$$

$$C(q^{-1}) = \frac{1}{(q - 1) * H(q)} \quad (2.49)$$

El modelo de cuarto orden, en función del operador de desplazamiento (operador de retardo q^{-1})

$$H(q) = \frac{b_0 q^3 + b_1 q^2 + b_2 q^1 + b_3 q^0}{q^4 + a_1 q^3 + a_2 q^2 + a_3 q^1 + a_4 q^0} \quad (2.50)$$

Reemplazando en la ecuación del controlador (2.49) se obtiene:

$$C(q) = \frac{q^4 + a_1 q^3 + a_2 q^2 + a_3 q + a_4}{b_0 q^4 + b_1 q^3 + b_2 q^2 + b_3 q - b_0 q^3 - b_1 q^2 - b_2 q - b_3} \quad (2.51)$$

La ecuación del controlador, en función del operador de retardo q^{-1} :

$$C(q) = \frac{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + a_3 q^{-3} + a_4 q^{-4}}{b_0 + (b_1 - b_0) q^{-1} + (b_2 - b_1) q^{-2} + (b_3 - b_2) q^{-3} + b_3 q^{-4}} \quad (2.52)$$

Como se vio en el diseño del controlador paso adelante 2.3.1.1, del esquema de la figura 2.3.1.1 se obtuvieron (2.16), (2.17) y (2.18). Reemplazando la ecuación del controlador (2.52) en la ecuación (2.17) se obtiene:

$$u[k] = C(q^{-1})e[k] = \left(\frac{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + a_3 q^{-3} + a_4 q^{-4}}{b_0 + (b_1 - b_0) q^{-1} + (b_2 - b_1) q^{-2} + (b_3 - b_2) q^{-3} + b_3 q^{-4}} \right) e[k] \quad (2.53)$$

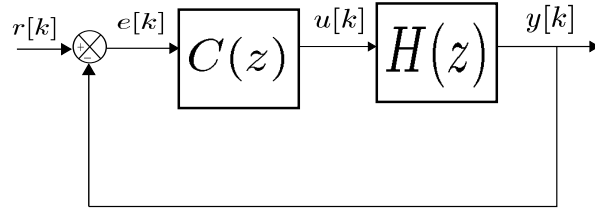


Figura 2.5: Esquema del controlador en función del operador z .

Despejando la señal de control se tiene:

$$u[k] = \left(\frac{1}{b_0}\right)[e[k] + a_1e[k-1] + a_2e[k-2] + a_3e[k-3] + a_4e[k-4] + \dots] \\ \dots + (b_0 - b_1)u[k-1] + (b_1 - b_2)u[k-2] + (b_3 - b_2)u[k-3] + b_3u[k-4]] \quad (2.54)$$

Finalmente se reemplaza la ecuación del error (2.18) en la ecuación (2.54) para obtener la señal que regulara la posición de la planta.

2.3.2.2. Control de la posición mediante un controlador PID basado en el método de asignación de polos

El esquema escogido en la figura 2.5 corresponde al método el “Controladores PID basados en el método de asignación de polos” [3, pág. 96]

Donde:

$r[k]$: es la señal de referencia. $e[k]$: es el error. $y[k]$: es la variable a controlar. $u[k]$: es la señal de control. $H(z)$: es la función de transferencia en lazo abierto del sistema en función del operador z . $C(z)$: es la forma del controlador en función del operador z . Del esquema del controlador de la figura 2.5 se tiene que:

$$y[k] = H(q^{-1})u[k] \quad (2.55)$$

$$u[k] = C(q^{-1})e[k] \quad (2.56)$$

$$e[k] = r[k] - y[k] \quad (2.57)$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores y despejando, se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado del sistema en términos del operador z :

$$H_{lc}(z) = \frac{C(z)H(z)}{1 + C(z)H(z)} \quad (2.58)$$

La estructura de estos controladores debe ser diseñada de tal forma que el numerador de la función de transferencia en tiempo discreto sea siempre de la forma de un polinomio de segundo orden [3, pág. 90] [16, pág. 126].

$$C(z) = \frac{C_1 z^2 + C_2 z + C_3}{z^2 - z} \quad (2.59)$$

La función de transferencia de segundo orden es:

$$H(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (2.60)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.59) y (2.60) en la ecuación (2.58):

$$H_{lc}(z) = \frac{(c_1 z^2 + c_2 z + C_3)(b_0 z + b_1)}{(z^2 + a_1 z + a_2)(z^2 - z) + (c_1 z^2 + c_2 z + c_3)(b_0 z + b_1)} \quad (2.61)$$

El polinomio característico de la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$P_c = (z^2 + a_1 z + a_2)(z^2 - z) + (c_1 z^2 + c_2 z + c_3)(b_0 z + b_1) \quad (2.62)$$

El polinomio deseado es de la forma:

$$P_d = z^4 + d_1 z^3 + d_2 z^2 + d_3 z + d_4 \quad (2.63)$$

Con la ayuda del comando *poly(polos*ones(tamaño))* del MATLAB, se obtienen los coeficientes del polinomio deseado (polos=0.2). Al realizar la comparación entre el polinomio característico (2.62) y el polinomio deseado (2.63) y luego al organizar de forma matricial $Ax = b$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_1 & 0 & -a_1 \\ 0 & b_1 & b_0 & -a_2 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.2 - a_1) \\ (0.24 - a_2) \\ (-0.032) \\ (0.0016) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Finalmente la señal de control está dada por:

$$u[k] = c_1(r[k] - y[k]) + c_2(r[k-1] - y[k-1]) + c_3(r[k-2] - y[k-2] + u[k-1]) \quad (2.65)$$

2.3.2.3. Control de la posición mediante un controlador por modelo de referencia

El modelo del sistema de cuarto orden:

$$H(q) = \frac{b_0q^3 + b_1q^2 + b_2q^1 + b_3q^0}{q^4 + a_1q^3 + a_2q^2 + a_3q^1 + a_4q^0} \quad (2.66)$$

Para realizar el control que llevará al sistema a la exigencia del modelo de referencia, se escogerá un controlador paso adelante:

$$H_{lc}(q^{-1}) = q^{-1} \quad (2.67)$$

$$C(q) = \frac{A(q)}{(q-1)B(q)} \quad (2.68)$$

Reemplazando la ecuación (2.33) en (2.34) obtendremos la referencia a la salida del modelo

$$r_m[k] = r[k-1] + 0.5r[k-2] - 0.3r[k-1] - 0.2r_m[k-2] \quad (2.69)$$

Con el controlador y el sistema en función de q^{-1} , se tiene que:

$$C(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1})}{(q-1)B(q^{-1})} \quad (2.70)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{b_0q^{-1} + b_1q^{-2} + b_2q^{-3} + b_3q^{-4}}{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3} + a_4q^{-4}} \quad (2.71)$$

Reemplazando la ecuación (2.71) en (2.70) se obtiene:

$$C(q^{-1}) = \frac{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3} + a_4q^{-4}}{b_0 + (b_1 - b_0)q^{-1} + (b_2 - b_1)q^{-2} + (b_3 - b_2)q^{-3} - b_3q^{-4}} \quad (2.72)$$

Reemplazando la ecuación del controlador (2.72) en la señal de control (2.31), se obtiene:

$$\begin{aligned} u[k] = & \left(\frac{1}{b_0}\right)[e[k] + a_1e[k-1] + a_2e[k-2] + a_3e[k-3] + a_4e[k-4] + \dots \\ & \dots + (b_0 - b_1)u[k-1] + (b_1 - b_2)u[k-2] + (b_2 - b_3)u[k-3] + b_3u[k-1]] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Reemplazando la señal del error, (2.32) y la ecuación de la referencia a la salida del modelo, (2.69) en la ecuación de la señal de control (2.70), se obtiene finalmente el controlador para el sistema por modelo de referencia:

$$\begin{aligned}
u[k] = & \left(\frac{1}{b_0}\right)[(r[k-1] + 0.5r[k-2] - 0.3r_m[k-1] - 0.2r_m[k-2] - y[k]) + \dots \\
& \dots + a_1(r[k-2] + 0.5r[k-3] - 0.3r_m[k-2] - 0.2r_m[k-3] - y[k-1]) + \dots \\
& \dots + a_2(r[k-3] + 0.5r[k-4] - 0.3r_m[k-3] - 0.2r_m[k-4] - y[k-2]) + \dots \\
& \dots + a_3(r[k-4] + 0.5r[k-5] - 0.3r_m[k-4] - 0.2r_m[k-5] - y[k-3]) + \dots \\
& \dots + a_4(r[k-5] + 0.5r[k-6] - 0.3r_m[k-5] - 0.2r_m[k-6] - y[k-4]) + \dots \\
& \dots + (b_0 - b_1)u[k-1] + (b_1 - b_2)u[k-2] + (b_2 - b_3)u[k-3] + b_3u[k-4]]
\end{aligned} \tag{2.74}$$

2.3.2.4. Control de la posición mediante la técnica de reubicación de polos

Para el modelo de cuarto orden se tiene:

$$H(Z) = \frac{b_0z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3}{z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4} \tag{2.75}$$

$$C(Z) = \frac{l_0z^3 + l_1z^2 + l_2z + l_3}{p_0z^4 + p_1z^3 + p_2z^2 + p_3z + p_4} \tag{2.76}$$

$$H_{lc} = \frac{H(Z)C(Z)}{1 + H(Z)C(Z)} \tag{2.77}$$

$$P_c = 1 + H(Z)C(Z) \quad \text{Polinomio característico} \tag{2.78}$$

$$P_d = z^8\alpha_0 + z^7\alpha_1 + z^6\alpha_2 + z^5\alpha_3 + z^4\alpha_4 + z^3\alpha_5 + z^2\alpha_6 + z\alpha_7 + \alpha_8 \quad \text{Polinomio deseado} \tag{2.79}$$

Realizando la comparación del polinomio característico con el polinomio deseado y organizando de forma matricial:

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1 & 1 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\
a_2 & a_1 & 1 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\
a_3 & a_2 & a_1 & 1 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
0 & a_4 & a_3 & a_2 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 \\
0 & 0 & a_4 & a_3 & 0 & 0 & b_3 & b_2 \\
0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & b_3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
p_1 \\
p_2 \\
p_3 \\
p_4 \\
l_0 \\
l_1 \\
l_2 \\
l_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
(\alpha_1 - a_1) \\
(\alpha_2 - a_2) \\
(\alpha_3 - a_3) \\
(\alpha_4 - a_4) \\
\alpha_5 \\
\alpha_6 \\
\alpha_7 \\
\alpha_8
\end{bmatrix} \tag{2.80}$$

La solución de las variables desconocidas se da al despejar:

$$x = A^{-1}b$$

Para hallar la ganancia en lazo cerrado, se evalúa la función de transferencia en uno:

$$g_{lc} = H_{lc}|_{z=1} = \frac{C(1)H(1)}{1 + C(1)H(1)} \quad (2.81)$$

La señal de control:

$$u[k] = C(q^{-1})\left[\frac{1}{g_{lc}}r[k]\right] - y[k] \quad (2.82)$$

Finalmente la señal de control:

$$\begin{aligned} u[k] = & -p_1u[k-1] - p_2u[k-2] - p_3u[k-3] - p_4u[k-4] + \dots \\ & \dots + l_0\left[\left(\frac{1}{g_{lc}}r[k-1]\right) - y[k-1]\right] + l_1\left[\left(\frac{1}{g_{lc}}r[k-2]\right) - y[k-2]\right] + \dots \\ & \dots + l_2\left[\left(\frac{1}{g_{lc}}r[k-3]\right) - y[k-3]\right] + l_3\left[\left(\frac{1}{g_{lc}}r[k-4]\right) - y[k-4]\right] \end{aligned} \quad (2.83)$$

2.4. Diseño de controladores por espacio de estados para el sistema multivariable

El método de espacio de estados se basa en, la descripción del sistema en términos de n ecuaciones en diferencias de primer orden que pueden combinarse en una ecuación matricial diferencial de primer orden.

El diseño en el espacio de estados se puede realizar para toda una clase de entradas, en lugar de una función de entrada específica, además permite incluir condiciones iniciales dentro del diseño, ésta es una característica muy importante que no tienen los métodos de diseño convencionales.

Existen muchas formas de llevar a cabo representaciones en el espacio de estado para el sistema en tiempo discreto entre estas se encuentra la forma canónica controlable, la forma canónica observable, la forma canónica diagonal, la forma canónica de Jordan.[5]

La ecuación (1.5) y (1.6) describen el sistema en el espacio de estados, el diseño del control por espacio de estados se muestra en la figura

El sistema discretizado se define como:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k] \quad (2.84)$$

$$\hat{y}[k] = \mathbf{C}\hat{x}[k] + \mathbf{D}u[k] \quad (2.85)$$

Se plantea una ley de control por realimentación de variables de estado:

$$u[k] = -L\hat{x}[k] + r[k] \quad (2.86)$$

Donde L es un vector de ganancias de dimensión $p \times n$ donde p es el número de salidas del sistema.

$$L = [L_1 L_2 \cdots L_n] \quad (2.87)$$

El vector de ganancias L es posible de calcular si el sistema es alcanzable para un controlador de seguimiento (con $r[k] \neq 0$) o controlable para un controlador de regulación (con $r[k] = 0$).

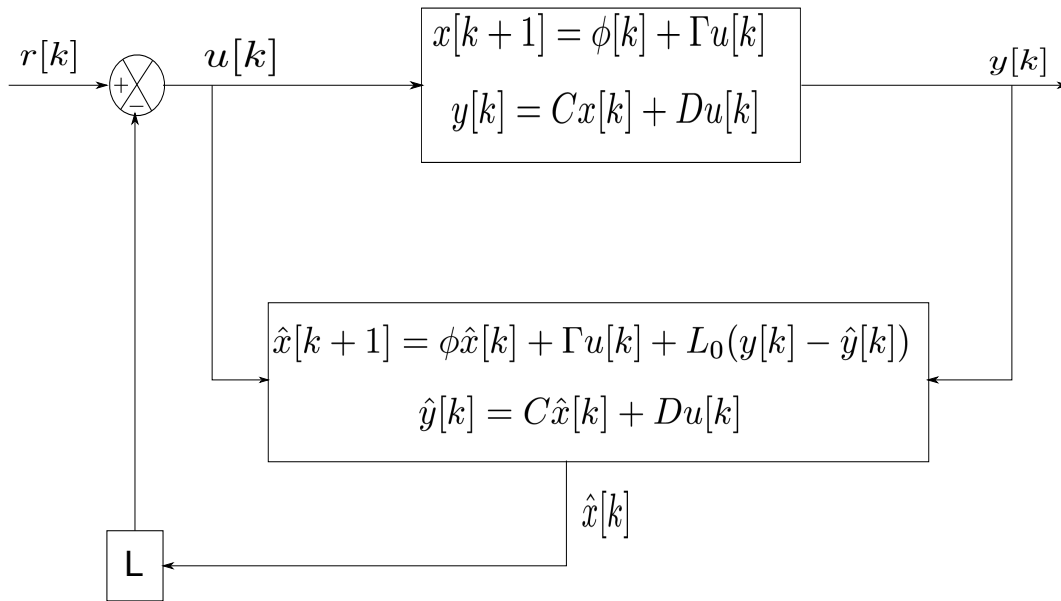


Figura 2.6: Esquema de control por espacio de estados con observador.

2.4.1. Ganancia en lazo cerrado

Para el controlador de seguimiento se propone a hallar la ganancia en lazo cerrado del sistema g_{lc}

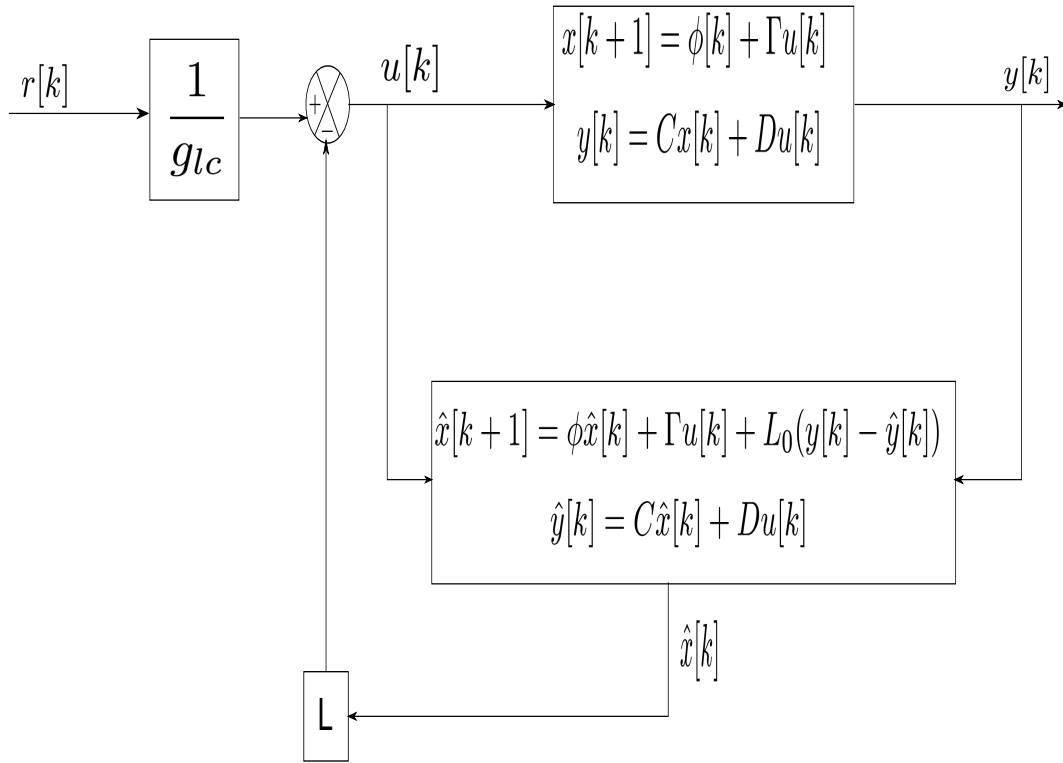


Figura 2.7: Esquema por espacio de estados con observador y ganancia en lazo cerrado.

El sistema en tiempo discreto se define como:

$$x[k+1] = \phi x[k] + \Gamma u[k] \quad (2.88)$$

$$\hat{y}[k] = C \hat{x}[k] + D u[k] \quad (2.89)$$

Dado que el objetivo es que el error de estimación $e[k]$ sea cero:

$$x[k] - \hat{x}[k] = 0 \quad (2.90)$$

luego

$$e[k+1] = \phi e[k] - L_0 C e[k] \quad (2.91)$$

Se obtiene la ganancia en lazo cerrado:

$$g_{lc} = \lim_{z \rightarrow 1} H_{lc}(z) \quad (2.92)$$

$$g_{lc} = \lim_{z \rightarrow 1} C \cdot (zI - \phi + \Gamma L)^{-1} \cdot \Gamma + D \quad (2.93)$$

La ganancia del observador de dimensión $n \times 1$ es de la forma:

$$L_o = \begin{bmatrix} L_{o1} \\ L_{o2} \\ \vdots \\ L_{on} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

2.4.2. Reubicación de polos con ganancia en lazo cerrado

A continuación se propone la solución al problema por reubicación de polos planteando un observador de estados, hallando la ganancia del observador mediante la fórmula de *Ackerman* y usando la ganancia en lazo cerrado del sistema.

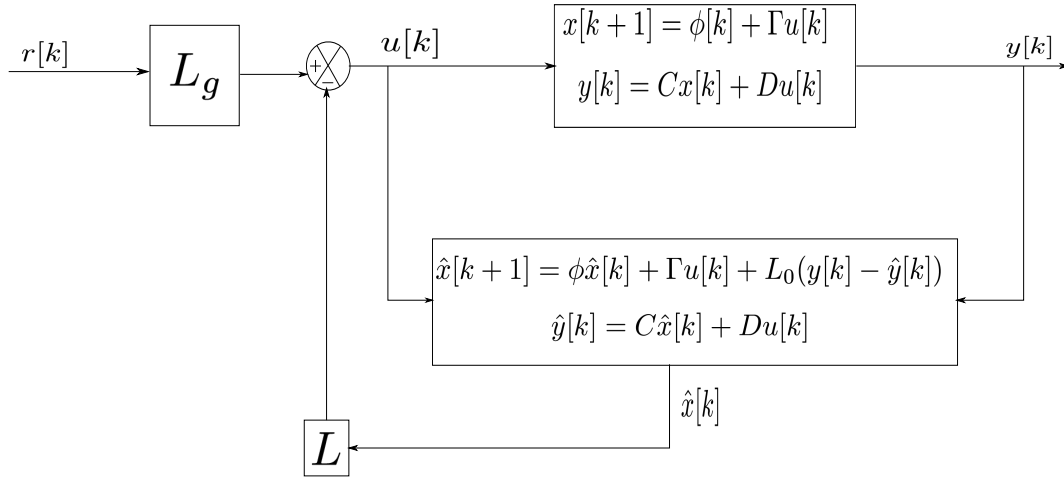


Figura 2.8: Esquema control por Reubicación de Polos con observador y ganancia en lazo directo.

El sistema discretizado se define como:

$$x[k+1] = \phi x[k] + \Gamma u[k] \quad (2.95)$$

$$\hat{y}[k] = C \hat{x}[k] + D u[k] \quad (2.96)$$

En la forma canónica controlador:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u[k] \quad (2.97)$$

$$\hat{y} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_n] \begin{bmatrix} \hat{x}_1[k] \\ \hat{x}_2[k] \\ \vdots \\ \hat{x}_n[k] \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

La matriz de observabilidad está definida como:

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot \phi^1 \\ \vdots \\ C \cdot \phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

La matriz $P(\phi)$ es una matriz $n \times n$, para un sistema de cuarto orden se define como:

$$P(\phi) = \phi^4 \cdot p_0 + \phi^3 \cdot p_1 + \phi^2 \cdot p_2 + \phi \cdot p_3 + I \cdot p_4 \quad (2.100)$$

Siendo I una matriz identidad de $n \times n$ y los valores de p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 son las raíces de un polinomio deseado. Se obtiene el vector de ganancias de dimensión $p \times n$ donde p es el número de salidas del sistema, para $p = 1$ se tiene que:

$$L = [(d_1 - a_1) \quad (d_2 - a_2) \quad \cdots \quad (d_n - a_n)] \quad (2.101)$$

Siendo d_1, d_2, d_3, d_4 son las raíces de un polinomio deseado. Es necesario que los polos seleccionados para el observador estén más cerca de cero que los polos del controlador. Como se vio anteriormente para el caso del controlador de seguimiento con ganancia en lazo cerrado se tiene que:

$$g_{lc} = \lim_{z \rightarrow 1} C \cdot (zI - \phi + \Gamma L)^{-1} \cdot \Gamma + D \quad (2.102)$$

$$L_g = [(zI - \phi + \Gamma L)^{-1} \cdot \Gamma]^{-1} \quad (2.103)$$

La ganancia del observador se obtiene aplicando la fórmula de *Ackerman*:

$$L_o = P(\phi) \cdot W_o^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Solo es posible encontrar esta ganancia si pueden encontrarse las variables de estado estimadas del sistema $\hat{x}[k]$ a partir de la señal de control $u[k]$ y la salida del sistema $y[x]$ [4].

Las variables de estado estimadas:

$$\hat{x}[k+1] = \phi\hat{x}[k] + \Gamma u[k] + L_o(y[k] - \hat{y}[k]) \quad (2.105)$$

Siendo:

$$\hat{y}[k] = C\hat{x}[k] \quad (2.106)$$

Se plantea la señal de control:

$$u[k] = -L\hat{x}[k] + L_g r[k] \quad (2.107)$$

2.4.3. Control por acción integral

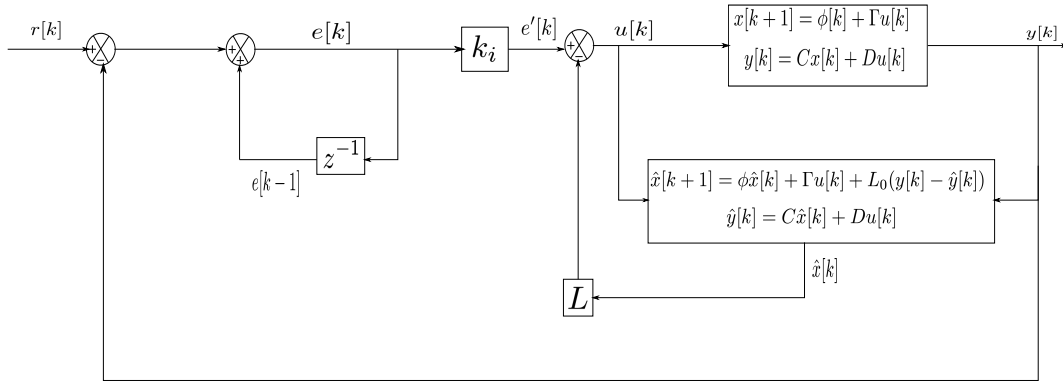


Figura 2.9: Esquema control por Acción integral con observador.

La señal de control es entonces:

$$u[k] = e'[k] - L\hat{x}[k] \quad (2.108)$$

Las variables de estado estimadas:

$$\hat{x}[k+1] = \phi\hat{x}[k] + \Gamma u[k] + L_o(y[k] - \hat{y}[k]) \quad (2.109)$$

La integral en términos del operador de desplazamiento q :

$$\frac{qh}{q+1} \quad (2.110)$$

Donde h es el tiempo de muestreo.
Luego la integral del error es:

$$e'[k+1] = k_i h e[k] + e'[k] \quad (2.111)$$

Se define un sistema aumentado

$$x_a[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ e'[k] \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ e'[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ e'[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r[k] \quad (2.113)$$

Donde:

$$\phi_a = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

$$\Gamma_a = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Se define la señal de control:

$$u[k] = -L_a x_a[k] + r[k] \quad (2.116)$$

$$L_a = [L \quad -K_i h] \quad (2.117)$$

2.4.4. Implementación de controladores por espacio de estados

En la sección anterior se ha visto el diseño de controladores con el método de espacio de estados y se plantea una ley de control por realimentación de variables de estado la cual tiene la forma:

$$u[k] = -L\hat{x}[k] \quad (2.118)$$

La señal de control es un escalar y el control esta dado por la multiplicación de la matriz L de ganancia de realimentación de estado y las variables estimadas mediante un observador del sistema a ser controlado. La selección apropiada de esta matriz de realimentación de estados L será determinante para el correcto funcionamiento del controlador. En el caso de reubicación de polos se determinan los polos en lazo cerrado deseados basados en los requisitos de respuesta transitoria como por ejemplo la velocidad, luego de haberse considerado el tipo de respuesta, se decide seleccionar los polos en lazo cerrado deseados (teniendo en cuenta que el sistema

no requiera señales de control excesivamente grandes), una condición necesaria y suficiente para que los polos puedan ser ubicados arbitrariamente en el plano z , es que el sistema sea de estado completamente controlable. Entonces es posible encontrar una matriz L que obligue al sistema a tener los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas. Nótese que L depende de las localizaciones en lazo cerrado deseadas (que determinan la velocidad de respuesta) que se haya seleccionado. En general, la matriz de ganancia de realimentación L es determinada de manera que el error (causado por perturbaciones) se reducirá a cero con suficiente velocidad por esta razón, para un sistema dado, es conveniente observar la mejor respuesta del sistema ante esta ganancia calculada a partir de varias ecuaciones características deseadas y seleccionar la que ofrezca un mayor desempeño general del sistema. Se listan a continuación algunos métodos para la determinación de la matriz de ganancia de realimentación L [5].

1. Mediante una matriz de transformación:

$$L = [(d_n - a_n)(d_{n-1} - a_{n-1}) \cdots (d_1 - a_1)]T^{-1} \quad (2.119)$$

Donde d_n son los coeficientes de los valores característicos deseados $(z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdots (z - \mu_n)$, los a_n son los coeficientes de la ecuación característica original del sistema y la matriz de transformación está dada por:

$$T = MW \quad (2.120)$$

Donde:

$$M = [\Gamma \quad \phi\Gamma \quad \cdots \quad \phi^{n-1}\Gamma] \quad (2.121)$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

2. Mediante la fórmula de *Ackerman*:

$$L = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] [\Gamma \quad \phi\Gamma \quad \cdots \quad \phi^{n-1}\Gamma]^{-1} P(\phi) \quad (2.123)$$

Donde:

$$P(\phi) = \phi^n + \phi^{n-1} \cdot d_1 + \cdots + \phi \cdot d_{n-1} + I \cdot d_n \quad (2.124)$$

3. Si los valores característicos deseados son diferentes:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.125)$$

Donde los vectores ξ_n son los vectores característicos de la matriz $(\phi - \Gamma K)$ y satisfacen la ecuación:

$$(\phi - \Gamma K) \xi_i = \mu_i \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.126)$$

$$\xi_i = (\phi - \mu_i I)^{-1} \Gamma, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.127)$$

Para una respuesta sin oscilación, se escogen iguales los valores característicos deseados y la ecuación anterior puede ser simplificada:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \phi^{-1} \Gamma \\ \xi_2 &= \phi^{-2} \Gamma \\ &\vdots \\ \xi_n &= \phi^{-n} \Gamma \end{aligned} \quad (2.129)$$

4. Un método simple para sistemas de bajo orden n , se sustituye la matriz $L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \end{bmatrix}$ en la ecuación característica del sistema:

$$|zI - \phi + \Gamma L| = 0 \quad (2.130)$$

Luego se hace coincidir los coeficientes de la ecuación característica deseada:

$$(z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdots (z - \mu_n) = z^n + d_1 z^{n-1} + \cdots + d_{n-1} z + d_n = 0 \quad (2.131)$$

El software **MATLAB** ofrece en su *toolbox* de control de sistemas la herramienta *acker* y *place*. Dado un vector de polos deseados en lazo cerrado P_d y un sistema de una o múltiples entradas de la forma:

$$\hat{x} = Ax + Bu \quad (2.132)$$

Se utiliza el toolbox:

$$L = \text{acker}(A, B, P_d)$$

$$L = \text{place}(A, B, P_d)$$

El programa calcula una matriz de ganancias L tal que los valores de realimentación para la señal de control $u = -Lx$ se encuentren situados en los valores deseados P_d . De esta manera las ganancias de los controladores mostradas anteriormente pueden ser calculadas con ayuda de **MATLAB**:

$$L = \text{acker}(\phi, \Gamma, P_d) \quad (2.133)$$

$$L = \text{acker}(\phi', \Gamma', P_{do}) \quad (2.134)$$

$$L = \text{acker}(\phi_a, \Gamma_a, P_d) \quad (2.135)$$

2.5. Control del sistema multivariable

La aproximación clásica del el control de un sistema MIMO está basado en el diseño de una matriz de control que controla todas las salidas del sistema a la vez. Los cálculos para dicha matriz de control se realizan por una computadora central. La ventaja de esta aproximación es básicamente la posibilidad de obtener el óptimo desempeño de un control, puesto que el controlador puede usar toda la información conocida acerca del sistema controlado. La desventaja de usar un controlador con una matriz central, es su demanda en recursos computacionales, dado a que el número de operaciones y memoria requerida depende del cuadrado del número del número de señales controladas. En la actualidad este problema ha sido reducido gracias al gran progreso del desarrollo de hardware computacional; esto, sin embargo, aumenta el precio del sistema de control. Si el controlador central falla, todas las señales de control se ven afectadas; debido a esto, la confiabilidad del sistema debe ser fundamental.

Una solución alternativa al control de los sistemas MIMO es una aproximación descentralizada. En este caso, el sistema es considerado como un arreglo de subsistemas interconectados y la salida de cada subsistema es influenciado no solo por la entrada de este subsistema sino también por la entrada de los otros subsistemas. Cada subsistema es controlado por un controlador independiente. Por lo tanto, el control descentralizado está basado en la descomposición del sistema MIMO en subsistemas, y el diseño de un controlador para cada subsistema. Otra ventaja de la aproximación descentralizada, es el hecho de que es mucho más sencillo establecer los parámetros de los controladores (como escoger los polos deseados del polinomio característico) para los lazos de control SISO que para los lazos de control MIMO. Por otra parte, el desempeño de un sistema de control descentralizado es subóptimo por que los controladores no usan información de los otros subsistemas. Una desventaja adicional es la limitada aplicabilidad del control descentralizado a sistemas simétricos (sistemas con un igual número de entradas y salidas).

Cada salida de un sistema multivariable controlado puede ser afectada por cada entrada del sistema. La fuerza del efecto es determinada no solo por las transferencias internas del sistema MIMO, sino también por la evolución de las

señales de entrada del sistema. Cuando la aproximación descentralizada es usada para controlar dicho sistema, luego desde el punto de vista del controlador de un subsistema en particular, la función de transferencia varia en el tiempo, incluso si el sistema MIMO es lineal y estable.

La presencia de las interconexiones entre subsistemas es la razón principal para usar controladores autosintonizados en la aproximación descentralizada para asegurar el curso de las variables controladas, una ampliación sobre este tema puede darse en la bibliografía que se cita [3].

2.5.1. Controlador con dos grados de libertad

Se requiere realizar un control sobre las salidas del sistema, en el caso del puente grúa se tiene un sistema con una entrada, la tensión sobre el motor D.C. y dos salidas que requieren ser reguladas: la posición del carro y la posición angular del péndulo. Para el caso del control sobre la posición del carro, se desea que ésta siga la referencia, como se vio anteriormente la señal de control no tiene otra limitante. En el caso del control de todo el sistema, la señal de control debe tener en cuenta la contribución que ejerce el movimiento del péndulo sobre el sistema que ocurre cuando el carro intenta alcanzar la referencia, por otro lado deberá mantener el ángulo tan cerca de la referencia como le sea posible, que para el caso del puente grúa será cero grados. Los sistemas de control prácticos a menudo tienen especificaciones que involucran propiedades de servo y de regulación. Esto es resuelto tradicionalmente utilizando una estructura con dos grados de libertad, como se muestra en la figura 2.10 [4].

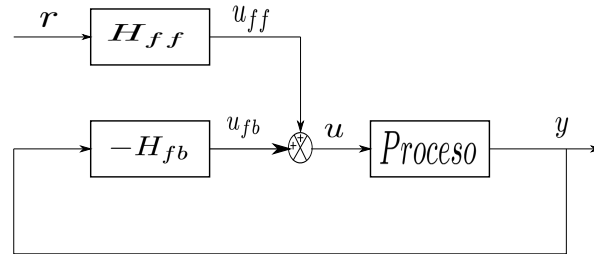


Figura 2.10: Diagrama de bloques de un sistema de realimentación con una estructura de dos grados de libertad [4].

Esta configuración tiene la ventaja de que los problemas de servo y de regulación son separados. El controlador de realimentación H_{fb} se diseña para obtener un sistema en lazo cerrado que es insensitivo a perturbaciones del proceso, ruido en la medida e incertidumbres del proceso. El compensador en lazo directo H_{ff} es diseñado luego para obtener las propiedades del servo deseado [4].

Una vez realizados los controladores polinomiales como se vio en secciones anteriores, es posible desarrollar el control de las salidas del sistema planteando un controlador de dos grados de libertad. Como se vio en la sección 1.6, se han obtenido las ecuaciones (1.8) y (1.9) que describen el sistema, la función de transferencia que

modela la posición del carro y la posición angular respectivamente, realizando el control sobre cada uno de los sistemas de manera independiente, se logra tener control sobre las contribuciones de cada uno de los sistemas por separado.

La señal de control para el sistema u es entonces la suma de la señal que controla la posición del carro u_{fb} en este caso la acción del servo y con la señal que controla la posición angular u_{ff} la regulación:

$$u = u_{fb} + u_{ff} \quad (2.136)$$

Del mismo modo por espacio de estados se podría realizar el controlador de dos grados de libertad, en el caso del sistema multivariable, incluyendo un controlador polinomial para hacer una mejor regulación del ángulo. Ver resultados [4.4](#) Reubicación de Polos por espacio de estados control sobre la posición más controlador por Reubicación de Polos regulación sobre el ángulo adaptativos, y [4.5](#) Reubicación de Polos por espacio de estados adaptativo óptimo control sobre la posición más controlador por Reubicación de Polos adaptativo regulación sobre el ángulo.

$$u = u_{EspaciodeEstados} + u_{polinomial} \quad (2.137)$$

2.5.1.1. Control de ángulo

La función de transferencia en tiempo discreto que describe el ángulo es como se muestra en la ecuación (1.8) Para el control del ángulo se desarrollaron los controladores de segundo orden como se ha visto en la sección (2.3.1), mediante la técnica paso adelante, PID y reubicación de polos, de segundo orden.

2.5.1.2. Control de la posición y el ángulo

Al haber desarrollado controladores para dos sistemas de manera independiente se tiene la posibilidad de diseñar cada controlador con las exigencias que requiera el sistema, entre las ventajas se tiene la posibilidad de diseñar controladores de cuarto orden para la posición y de segundo orden para el control de la posición angular, considerar la necesidad de los polos de cada sistema y realizar una combinación de controladores para cada sistema que resulte más conveniente.

3. CONTROL ADAPTATIVO Y CONTROL ÓPTIMO ADAPTATIVO

3.1. Objetivo

Presentar el algoritmo de mínimos cuadrados para la estimación de parámetros en línea y la descripción del control óptimo LQR a través de los multiplicadores de Lagrange.

3.2. Introducción

Control adaptativo

Los controladores convencionales están pensados para controlar sistemas dinámicos cuyos parámetros no cambian, es decir, son invariantes con el tiempo o, como ocurre en la realidad, sistemas sin grandes perturbaciones cuyos parámetros no varían excesivamente al trabajar en torno a un punto de funcionamiento [7].

Sin embargo es muy normal encontrarse con sistemas cuya dinámica cambia de forma no lineal en un instante, como es el ejemplo de un motor de corriente continua que varía sus parámetros en función de la carga. En estos casos el uso de controladores convencionales hace que el sistema no se comporte como se pretende en todas las situaciones [7], para dar solución a este tipo de problemas surgen los controladores adaptativos.

La técnica del Control Adaptativo surge a partir de 1950 con el fin de dar solución a problemas de control en los que las características del sistema a controlar son variables o poco conocidas [8].

El término control adaptativo posee diversos significados pero, en términos generales, implica que un sistema mida las características dinámicas de una planta (función de transferencia o ecuación de estado) en forma continua y automática, las compare con las características dinámicas deseadas y utilice la diferencia entre ambas para variar los parámetros ajustables del sistema (estos parámetros suelen ser las características del controlador) o genera una señal actuante, de modo que se mantenga un desempeño óptimo; por tanto es capaz de acomodarse a modificaciones no predecibles de un medio, sean esos cambios internos o externos al sistema, un esquema general es mostrado en la figura 3.1 [8].

Desde el principio de la tecnología de control adaptativo, se han propuesto dos clases distintas de controladores adaptativos directos e indirectos. En el indirecto,

los parámetros de la planta se estiman y se ajustan en base a los datos de entrada y salida. En el directo, los parámetros del controlador se ajustan directamente en base a los datos de entrada y salida. Existen una gran variedad de esquemas adaptativos dentro de estas dos clases, tales como el Model Reference Adaptive Control (MRAC), Self-Tuning Adaptive Control (STAC), Self-Organizing Fuzzy Logic (SOFLIC), Neural Networks (NN), y Neurofuzzy Adaptive Control (NAC) [9].

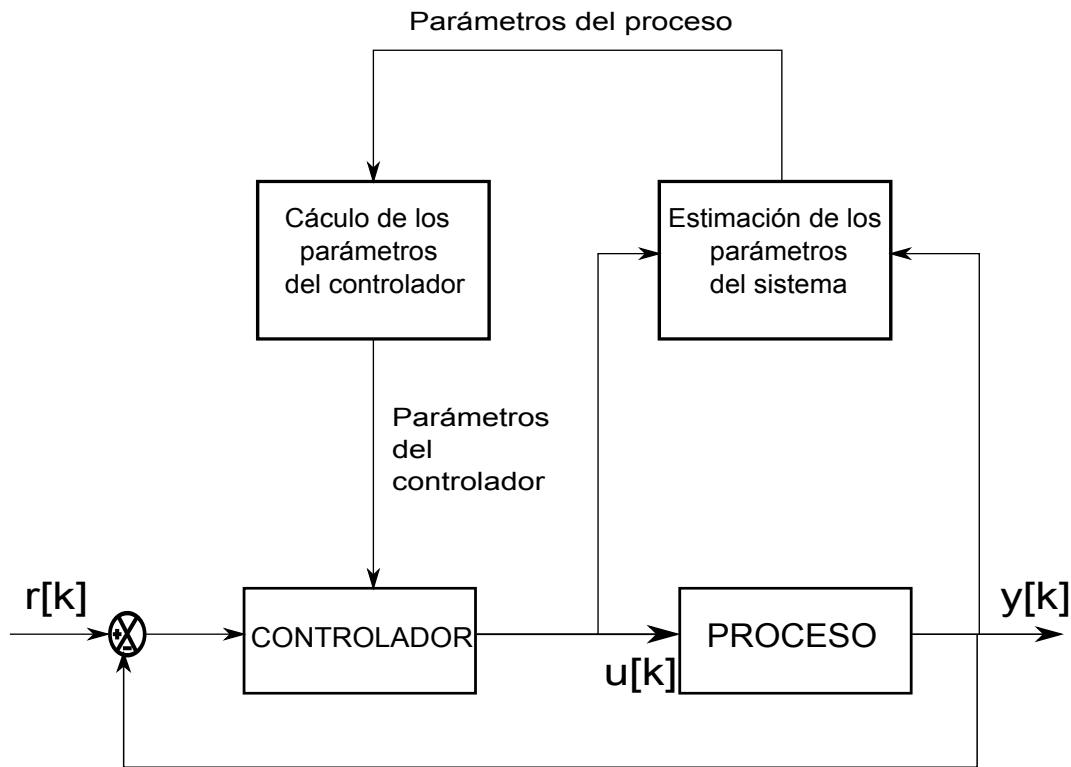


Figura 3.1: Sistema adaptativo con identificación de modelo (MIAS) [8]

Para los procesos cuyos parámetros varían lentamente en el tiempo, los controladores adaptativos con realimentación pueden ser divididos en dos grandes grupos. Los sistemas adaptativos con identificación de modelo (*MIAS*) determinan un modelo del proceso las medidas de entrada-salida y métodos de identificación figura 3.1. Aquí los parámetros son calculados de acuerdo con el método de diseño del controlador que ha sido programado con anterioridad. Esta clase de reguladores adaptativos también es denominada "self tuning regulators"[9].

Los sistemas adaptativos con modelo de referencia (*MRAS*) intentan obtener una respuesta en bucle cerrado próxima a la dada por el modelo de referencia para la señal de entrada figura 3.2. Aquí una señal externa, por ejemplo la variable de referencia, es medida y la diferencia entre las señales se forma usando las señales del bucle de control y del modelo de referencia y cambiando los parámetros del controlador por medio de un método adaptativo [9].

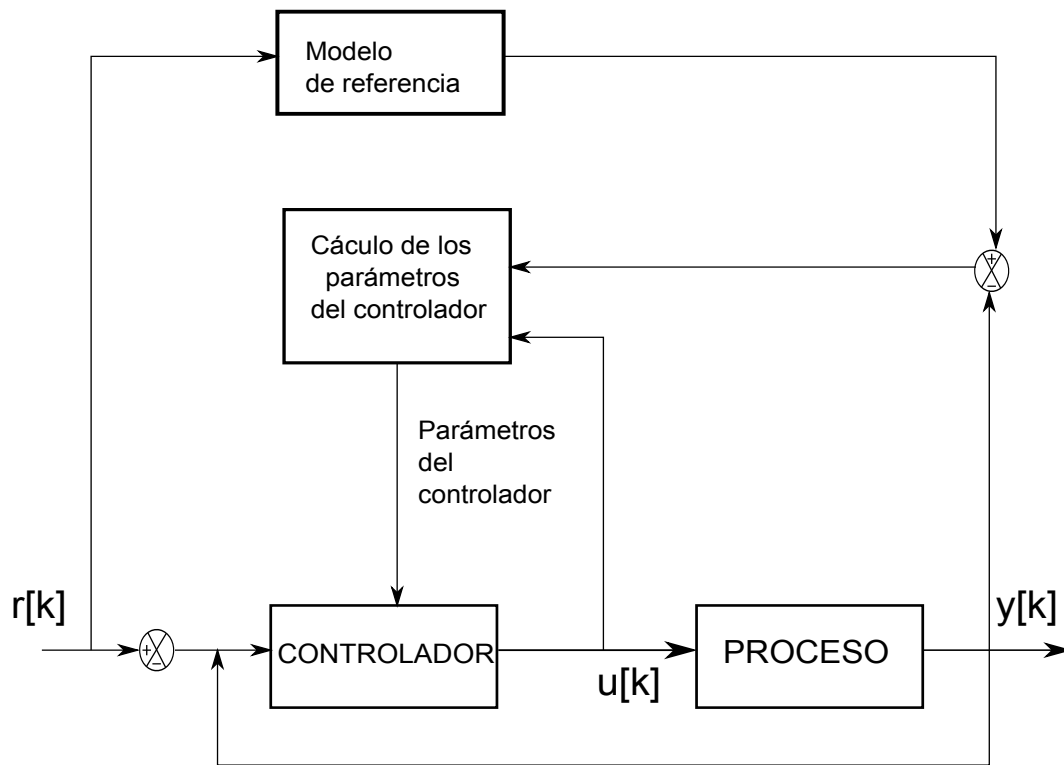


Figura 3.2: Sistema adaptativo con modelo de referencia (MRAS) [9]

3.3. Estimación en línea

Estimación

La estimación puede definirse como la determinación de constantes o variables de un sistema de forma óptima con respecto a un índice estadístico, y que son basadas en una serie de medidas tomadas sobre el proceso. El problema de la estimación de parámetros consiste en obtener los valores de los coeficientes de un modelo matemático, cuya estructura se supone conocida, haciendo uso de medidas del proceso; si existieran ruidos, el problema de estimar magnitudes a partir de unas medidas se reduciría a resolver las ecuaciones del modelo matemático (algebraicas en la estimación paramétrica y diferenciales en la estimación de estados). Sin embargo, al existir ruidos, la solución será probablemente diferente para cada serie de medidas. Por consiguiente, las estimaciones calculadas de esta forma tienen una naturaleza aleatoria [21].

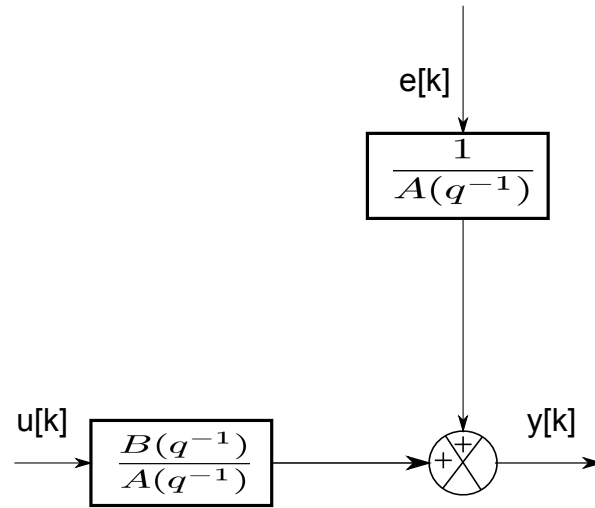


Figura 3.3: Estructura del modelo ARX [7]

Para estimar los parámetros se plantea un modelo ARX (auto-regressive and exogenous variable) [7], este modelo es el más simple con el que se puede describir el comportamiento dinámico de un conjunto discreto de mediciones de entrada y salida tomadas durante un cierto número de intervalos de tiempo T , representándose con la siguiente expresión:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) + e(k) \quad (3.1)$$

donde $e(k)$ es un ruido blanco que entra como error directo. Debido a que es un error no medible, su cálculo, a partir del modelo, puede servir como una estimación de este. En muchos casos asumir o no este error, aleja o acerca a la identificación del proceso de la realidad. Añadiéndole se asumen factores tales como las no linealidades o la imprecisión en las mediciones que influyen sobre la salida. Así este error engloba este grupo de comportamientos, aceptando que la parte determinista del modelo no es exacta.

Con esto, el vector de parámetros ajustables del modelo θ es:

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T \quad (3.2)$$

De la estructura del modelo ARX se tiene que:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \quad (3.3)$$

$$y(k) = \frac{1}{A(q^{-1})} e(k) \quad (3.4)$$

Se definen además los polinomios:

$$B(q^{-1}) = b_0q^{-1} + b_1q^{-2} + \dots + b_{n-1}q^{-n} \quad (3.5)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n} \quad (3.6)$$

3.3.1. Identificación del sistema fuera de línea

Para hacer la identificación del sistema fuera de línea es necesario conocer el orden del sistema y los valores de las entradas y las salidas.

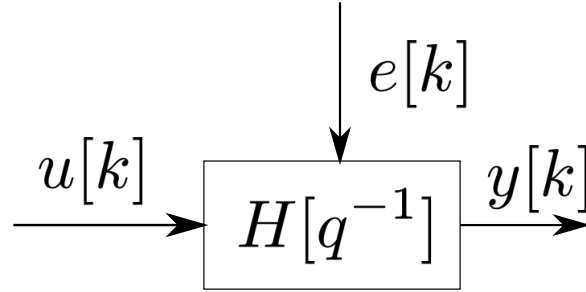


Figura 3.4: Sistema a identificar con una entrada y una salida

$u[k]$: Entrada

$y[k]$: Salida

$e[k]$: Ruido blanco

Si la función de transferencia discreta esta dada por (3.7):

$$H(q) = \frac{b_0q^2 + b_1q + b_2}{q^3 + a_1q^2 + a_2q + a_3} \quad (3.7)$$

El objetivo será obtener los parámetros del vector θ dado por:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Ahora escribiendo a $H(q)$ en términos del operador de retardo q^{-1} :

$$H(q) = \frac{b_0q^{-1} + b_1q^{-2} + b_2q^{-3}}{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3}} \quad (3.9)$$

con

$$y[k] = H(q^{-1})u[k] \quad (3.10)$$

se obtiene una ecuación en diferencias de la forma $y[k] = \phi^T[k-1]\theta$

$$y[k] = [-y[k-1] - y[k-2] - ay[k-3] + u[k-1] + u[k-2] + u[k-3]] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$y[k] = -a_1y[k-1] - a_2y[k-2] - a_3y[k-3] + b_0u[k-1] + b_1u[k-2] + b_2u[k-3] \quad (3.12)$$

A continuación se presenta el modelo de tercer obtenido y escrito de forma canónica controlador, de la planta con estimación fuera de linea.

$$A = \begin{bmatrix} 1.2543 & -0.2911 & 0.2486 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$C = [0.0337 \quad -0.0186 \quad 0.0178] \quad (3.15)$$

3.3.2. Método de mínimos cuadrados

El pilar fundamental de este método se centra en el concepto de regresión lineal, y permite la identificación en tiempo real de modelos tanto lineales como no lineales, siempre y cuando sus parámetros si lo sean.

Para ello se considera como modelo paramétrico, el modelo ARX explicado anteriormente, pero sin tener en cuenta el ruido blanco que entra como error directo. Su expresión escrita en ecuaciones en diferencias queda:

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n) \quad (3.16)$$

Con lo que se dispone de un modelo determinista cuya función de transferencia corresponde a la siguiente expresión:

$$H(q^{-1}) = \frac{b_0q^{-1} + b_1q^{-2} + \dots + b_{n-1}q^{-n}}{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}} \quad (3.17)$$

Se puede reescribir la ecuación (3.16) como:

$$y(k) = \phi^T \theta \quad (3.18)$$

dónde:

- $y(k)$ es la magnitud medible
- ϕ es el vector regresor:

$$\phi = [-y(k-1) \dots -y(k-n) u(k-1) \dots u(k-n)] \quad (3.19)$$

- θ es el vector de parámetros:

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T \quad (3.20)$$

De esta forma para el valor del vector θ en un cierto instante k se produce un error de predicción:

$$e(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k) = y(k) - \phi(k)\theta \quad (3.21)$$

Se puede observar por la expresión (3.18) que el número de incógnitas que se tiene es de $2n$, por lo que a partir de este número de medidas se puede determinar el valor real del vector θ al disponerse de las $2n$ ecuaciones necesarias. Sin embargo, debido al hecho de que el modelo que se intenta estimar no suele coincidir con el sistema real, el método de mínimos cuadrados parte de N pares $[y(k); \phi(k)]$, un valor muy superior a $2n$, ya que no se puede encontrar de forma general un vector de parámetros que consiga hacer cero el error, en cambio sí que se puede hallar un vector que minimice el error, pues se trata de sistemas de ecuaciones incompatibles. En el caso, poco probable, de que coincidan proceso y modelo, se tiene un sistema sobredeterminado compatible, lo que da como resultado un error de predicción cero a partir de la muestra $2n$.

Las medidas obtenidas desde $k = n$, hasta $k = N$ se agrupan de la siguiente manera:

$$E(N, \theta) = Y(N) - \Phi(N)\theta \quad (3.22)$$

donde los vectores $E(N, \theta)$ e $Y(N)$ tienen la siguiente composición:

$$E(N, \theta) = [e(n, \theta) \dots e(N, \theta)]^T \quad (3.23)$$

$$Y(N) = [y(n) \dots y(N)]^T \quad (3.24)$$

y estando compuesta la matriz $\Phi(N)$ por los regresores correspondientes:

$$\Phi(N) = \begin{bmatrix} \phi(n) \\ \vdots \\ \phi(N) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

De esta manera se define la función de costos como:

$$J(\theta) = \|E(N, \theta)\|^2 = \sum_{k=n}^N e^2(k, \theta) \quad (3.26)$$

que se puede reescribir de la forma:

$$J(\theta) = [Y(N) - \Phi(N) \cdot \theta]^T \cdot [Y(N) - \Phi(N) \cdot \theta] \quad (3.27)$$

donde el mínimo valor de $J(\theta)$ se da en el valor del vector de parámetros que cumpla:

$$\nabla J_\theta = 0 \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow 2[\Phi(N) \cdot \theta - Y(N)]^T \cdot \Phi(N) = 0 \quad (3.29)$$

obteniéndose que el valor del vector de parámetros, que hace mínimo este índice y por lo tanto pertenece al modelo identificado. es:

$$\hat{\theta} = [\Phi^T(N) \cdot \Phi(N)]^{-1} \cdot \Phi^T(N)Y(N) \quad (3.30)$$

3.3.3. Método mínimos cuadrados recursivo

El método de Mínimos Cuadrados Recursivo permite estimar en tiempo real los parámetros del sistema, y puesto que deriva del método de mínimos cuadrados, está sujeto a las mismas restricciones.

La estimación obtenida en el instante k viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= [\Phi^T(k) \cdot \Phi]^{-1} \cdot \Phi^T(k) \cdot Y(k) \\ &= P(k) \cdot \Phi^T(k) \cdot Y(k) \\ &= P(k) \cdot [\Phi^T(k-1) \cdot Y(k-1) + \phi^T(k) \cdot y(k)]\end{aligned}\tag{3.31}$$

donde $P(k)$ es la matriz de covarianza, de la que se puede comprobar que:

$$P^{-1}(k-1) = P^{-1}(k) - \phi^T(k) \cdot \phi(k)\tag{3.32}$$

Por otra parte se puede obtener:

$$\begin{aligned}\Phi^T(k-1) \cdot Y(k-1) &= P^{-1}(k-1) \cdot \hat{\theta}(k-1) \\ &= P^{-1}(k) \cdot \hat{\theta}(k-1) - \phi^T(k) \cdot \phi(k) \cdot \hat{\theta}(k-1)\end{aligned}\tag{3.33}$$

sustituyendo en (3.31) se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) - P(k) \cdot \phi^T(k) \cdot \phi(k) \cdot \hat{\theta}(k-1) + P(k) \cdot \phi^T(k) \cdot y(k) \\ &= \hat{\theta}(k-1) - P(k) \cdot \phi^T(k) \cdot [y(k) - \phi(k) \cdot \hat{\theta}(k-1)]\end{aligned}\tag{3.34}$$

De esta forma se ha expresado el vector de parámetros de una forma recursiva. Se pueden reescribir las ecuaciones para que queden de la siguiente manera:

$$P(k) = [P(k-1) - \frac{P(k-1) \cdot \phi^T(k) \cdot \phi(k) p(k-1)}{1 + \phi^T(k) \cdot P(k-1) \cdot \phi(k)}]\tag{3.35}$$

$$P(k) = [P(k-1) - \frac{P(k-1) \cdot \phi^T(k) \cdot \phi(k) p(k-1)}{1 + \phi^T(k) \cdot P(k-1) \cdot \phi(k)}]\tag{3.36}$$

$$K(k) = [\frac{P(k-1)}{1 + \phi^T(k) \cdot P(k-1) \cdot \phi(k)}]\tag{3.37}$$

$$e(k) = y(k) - \phi^T(k) \cdot \hat{\theta}(k-1)\tag{3.38}$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)\phi(k) \cdot e(k) \quad (3.39)$$

Obtenidas estas expresiones, los pasos que debe seguir el algoritmo de forma recursiva son los siguientes:

- Inicialización de la matriz de covarianza P y el vector de parámetros θ .
- Calculo recursivo. Para cada instante k :
- Obtener valores $y(k)$ y $u(k)$ de la planta (entrada y salida de esta)
- Formar el vector de regresión $\phi(k)$:

$$\phi(k) = [-y(k-1) \cdots -y(k-n)u(k-1) \cdots u(k-n)] \quad (3.40)$$

- Calcular la matriz de covarianza $P(k)$ mediante:

$$P(k) = [P(k-1) - \frac{P(k-1) \cdot \phi^T(k) \cdot \phi(k)p(k-1)}{1 + \phi^T(k) \cdot P(k-1) \cdot \phi(k)}] \quad (3.41)$$

- Calcular $K(k)$ según la expresión:

$$K(k) = [\frac{P(k-1)}{1 + \phi^T(k) \cdot P(k-1) \cdot \phi(k)}] \quad (3.42)$$

- Estimar el error cometido en el instante k :

$$e(k) = y(k) - \phi^T(k) \cdot \hat{\theta}(k-1) \quad (3.43)$$

- Calcular $\hat{\theta}(k)$:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)\phi(k) \cdot e(k) \quad (3.44)$$

El esquema de identificación puede representarse como se muestra en la Figura 3.5, donde la función de mínimos cuadrados, a partir del regresor que se obtiene de las

señales de entrada y salida de la planta, estima los parámetros de esta, cometiendo en la operación un error respecto a los reales que debe minimizarse.

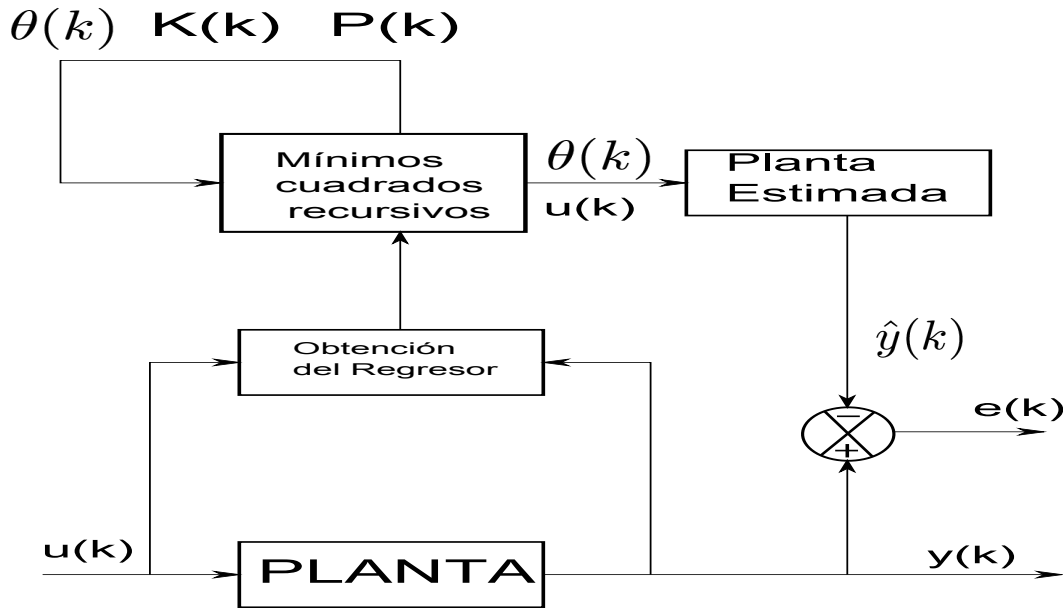


Figura 3.5: Esquema identificación por Mínimos Cuadrados Recursivos [7].

3.3.4. Mínimos Cuadrados con factor de olvido

El principal problema de los mínimos cuadrados recursivos es la incapacidad para detectar cambios en parámetros, debido a que la matriz P se hace muy pequeña, teniéndose en cuenta en igual medida todas las muestras. Una manera de solucionarlo es introduciendo un coeficiente de olvido λ , de forma que se ponderan más las muestras recientes que las pasadas. Si se toma esta consideración, la nueva función de costos, viene dada por la siguiente expresión:

$$J = e^T(k) \cdot Q \cdot e(k) \quad (3.45)$$

donde:

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{k-N} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Realizándose nuevamente los cálculos descritos con anterioridad, se puede llegar a las expresiones siguientes:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - P(k) \cdot \phi(k) \cdot e(k) \quad (3.47)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left[P(k-1) - \frac{P(k-1) \cdot \phi^T(k) \cdot \phi(k) p(k-1)}{\lambda + \phi^T(k) \cdot P(k-1) \cdot \phi(k)} \right] \quad (3.48)$$

$$K(k) = \left[\frac{P(k-1)}{\lambda + \phi^T(k) \cdot P(k-1) \cdot \phi(k)} \right] \quad (3.49)$$

$$e(k) = y(k) - \phi^T(k) \cdot \hat{\theta}(k-1) \quad (3.50)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) \cdot \phi(k) \cdot e(k) \quad (3.51)$$

El valor de λ debe estar comprendido entre 0 y 1, y en función de este valor se pueden observar los siguientes comportamientos:

- $\lambda_{pequeno}$ - Cuanto más pequeño sea antes se descartan datos pasados debido a que las matrices P y K se hacen más grandes.
- λ_{grande} - Para valores cercanos a la unidad se producen problemas a la hora de detectar cambios. Si este parámetro toma el valor de 1, el método se comporta como unos mínimos cuadrados sin factor de olvido.

Por norma general este parámetro se suele tomar entre 0.9 y 0.98, aunque depende bastante de los parámetros asociados del sistema.

3.4. Implementación de controladores adaptativos

De manera análoga como se vio en el capítulo 2 para la implementación de controladores fijos. Se hace la implementación de los controladores adaptativos, donde las funciones de transferencia para la posición y el ángulo se describen de cuarto orden (2.54) y de segundo (2.55) respectivamente.

$$\frac{X(Z)}{U(Z)} = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4} \quad (3.52)$$

$$\frac{\Theta(Z)}{U(Z)} = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (3.53)$$

Los coeficientes $a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3$ que corresponden al vector θ que son estimados de manera adaptativa a través del algoritmo de mínimos cuadrados, tanto para la referencia de la posición como para la referencia del ángulo.

Finalmente, de manera similar como se diseñaron e implementaron los controladores fijos para posición y ángulo en capítulo 2, se diseñan y se implementan los controladores adaptativos.

Representación en espacio de estados forma canónica controlador para las funciones de transferencia.

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_4 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} u(k) \quad (3.54)$$

$$y(k) = [(b_4 - a_4 b_0)(b_3 - a_3 b_0) \cdots (b_1 - a_1 b_0)] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.55)$$

Así el resultado obtenido es un control adaptativo que es capaz de calcular los valores del controlador en cada instante tiempo en función de las respuestas del sistema que está controlando, lo que produce un ajuste preciso, evitando comportamientos inestables o no deseados en caso de cambios no lineales en los parámetros de la planta [7].

3.5. Control óptimo

El principio de optimización nació en el siglo XVII cuando se vio la necesidad de determinar cuál, entre todas las trayectorias posibles, era la que llevaba a una partícula (sin rozamiento) en el menor tiempo posible, desde un punto A a un punto B en el mismo plano vertical y sujeta a la acción de la gravedad; éste fue llamado el problema del **Braquistocrono**, el cual también dio paso al nacimiento del **CONTROL ÓPTIMO** [2].

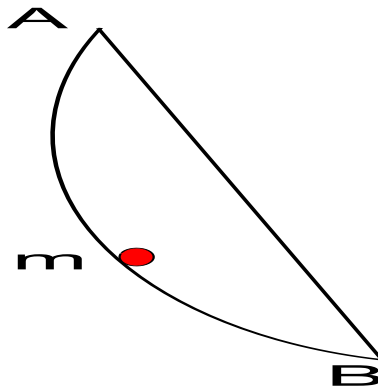


Figura 3.6: Braquistocrono [2].

El control óptimo en origen estuvo estrictamente relacionado con la teoría del cálculo de variaciones. Avances importantes en la teoría de control óptimo en el siglo XX fueron el desarrollo de la programación dinámica por Richard Bellman y la formulación del principio del mínimo por Lev Pontryagin [22].

El control óptimo es una rama del control moderno que se relaciona con el diseño de controladores para sistemas dinámicos tal que se minimice una función de medición que se denomina **índice de desempeño** o costo del sistema [23].

En términos más formales, el objetivo principal de la teoría de control óptimo es determinar las señales de control que conducen a un proceso a satisfacer las restricciones físicas que se tengan y asimismo minimizar o maximizar según sea el criterio de desempeño deseado, como lo pueden ser: el costo, el tiempo de diseño, la rapidez en la respuesta de un sistema, etc., tal que las variables asociadas a este sistema, expresadas en forma de ecuaciones e inecuaciones algebraicas, relacionadas mediante expresiones matemáticas que describen el comportamiento de un sistema físico, minimicen o maximicen esa función objetivo [2]. La solución de algunos problemas de control no es posible obtenerla usando métodos de control clásicos. Esto puede ser dada la complejidad, o que se requiera satisfacer ciertos parámetros relacionados con su desempeño. Un ejemplo típico de esto es el diseño de un sistema de control de altitud para una nave espacial que minimice el gasto de combustible [23].

Hay diversas formulaciones del problema de control óptimo, que varían dependiendo del criterio de optimalidad, del tipo de dominio de tiempo (continuo o discreto), de la presencia de diversos tipos de restricciones, y de qué variables están libres. La formulación de un problema de control óptimo requiere en general [22]

- Definir el modelo matemático del sistema controlado
- Especificar el criterio de optimalidad
- Especificar las condiciones de contorno para el estado
- Describir las restricciones sobre el estado y los controles y

- Describir cuales variables del problema están libres.

La casi totalidad de los problemas de control óptimo no se pueden resolver analíticamente. La llegada de los ordenadores electrónicos ha fomentado el desarrollo de distintos métodos numéricos y permitido la aplicación del control óptimo a muchos problemas complejos. Los métodos numéricos para la resolución de problemas de control óptimo son esencialmente de dos tipos directos e indirectos [22].

En los métodos directos, los problemas de control óptimo se discretizan y se convierten en problemas de programación matemática no lineal. Los métodos indirectos se basan en encontrar una solución numérica de una condición necesaria de optimalidad. En general se usa la condición de Euler-Lagrange [22].

Una de las grandes ventajas del control óptimo es la capacidad que tiene para ser implementado en la solución de problemas con modelos que poseen múltiples entradas y salidas, además de condiciones iniciales diferentes de cero [2].

índice de desempeño. - Al diseñar un sistema de control óptimo o un sistema regulador óptimo, se necesita encontrar una regla para determinar la decisión de control presente, sujeta a ciertas restricciones, para minimizar alguna medida de la desviación de un comportamiento ideal. Dicha medida es provista, generalmente, por el índice de desempeño seleccionado que es una función cuyo valor se considera una indicación de qué tanto se parece el desempeño del sistema real al desempeño deseado. En la mayoría de los casos, el comportamiento del sistema se hace óptimo al escoger el vector de control $u(k)$ de tal forma que el índice de desempeño se minimice (o maximice, dependiendo de la naturaleza del índice de desempeño seleccionado). La selección de un índice de desempeño apropiado es importante porque, en alto grado, determina la naturaleza del sistema de control óptimo resultante. Esto es, que el sistema resultante sea lineal, no lineal, estacionario, o variante con el tiempo, dependerá de la forma del índice de desempeño. Por lo tanto, el ingeniero de control formula este índice en base a los requisitos que el sistema debe cumplir y lo toma en cuenta para determinar la naturaleza del sistema resultante. Los requisitos de diseño por lo regular no sólo incluye especificaciones de desempeño, sino también, para asegurar que sea físicamente realizable, restringen la forma del control a utilizar [5].

Algunos de los posibles índices de desempeño que se introducen en el control óptimo *LQR* son: **Problemas de tiempo mínimo, Control terminal, Esfuerzo mínimo, Problema de seguimiento, ITAE** [2].

3.6. Control óptimo cuadrático *LQR*

Para la realización de este trabajo se empleara un controlador lineal multivariable con realimentación de estado, y se propone el denominado control óptimo lineal cuadrático (Linear Quadratic Regulator). La elección de este tipo de control se basa en su relativa sencillez mediante la utilización de la herramienta computacional

MATLAB. Al ser un controlador lineal, su cálculo se efectúa sobre el modelo, previamente linealizado, y con las técnicas lineales para modelos de estados, propone una ley de control ($u = K\Delta x$), muy robusta, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, lo que permite su implementación en sistemas de control digital [2].

El controlador permite la solución del problema conocido como *LQR* el cuales un problema de regulación. Este controlador trata de mantener al sistema en un estado lo más cercano al de reposo $x = 0$, haciendo uso mínimo de la señal de control u . El problema de regulación se resuelve a partir de la optimización de un índice de desempeño cuadrático, usando la ecuación algebraica de **Ricatti**, dando lugar a una solución lineal, la cual es considerada como el vector de ganancias de realimentación K . El índice de desempeño cuadrático que caracteriza al *LQR* se presenta a continuación [2].

$$J = x^T(t_f)P_0x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.56)$$

En muchos problemas se considera $t_f \rightarrow \infty$, en este caso el índice de desempeños se reduce a la ecuación (3.57).

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.57)$$

Los términos que hacen parte del índice de desempeño (3.57) se interpretan de la siguiente manera:

$x^T \cdot Q \cdot x$: es una medida de la desviación de los estados respecto a los estados deseados. $u^T \cdot R \cdot u$: es una medida del esfuerzo del control. $x(t_f)^T \cdot P_0 \cdot x(t_f)$: Es una medida de la desviación de los estados respecto a los estados deseados en el instante final del intervalo de optimización.

Este índice de desempeño esta compuesto por dos partes; una trata de transferir al sistema desde un estado inicial x_0 a un estado deseado final x_f (normalmente el estado de equilibrio o reposo del sistema $x_f = 0$) con un costo mínimo del valor cuadrático medio del error, es decir, que la relación $x - x_f$ se puede considerar como el error instantáneo del sistema. Pero si $x_f = 0$ (regulación de estado), entonces x_0 es el mismo error. De manera que el costo correspondiente a las desviaciones del estado de reposo se expresa por el índice de la ecuación (3.58) [2].

$$J_1 = \int_0^T (x^T Q x) dt \quad (3.58)$$

Donde Q es una matriz hermitica definida positiva, o semidefinida positiva, y simétrica real; donde sus elementos penalizan respectivamente el error de estado x . De modo que el producto de $x^T x$ es un escalar de valor $|x^2| = x_1^2 + x_2^2 \cdots x_i^2$, que representa la energia normalizada de x ; el subíndice n indica el número de estados[2].

La forma más simple de Q es diagonal.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Donde q_{ii} representa el peso que se le da al estado al momento de evaluar su contribución al índice de desempeño J y el producto de $x^T Q x$ queda de la forma (3.60).

$$x^T Q x = q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + \cdots + q_{ii}x_i^2 \quad (3.60)$$

Cuanto mayor es el valor q_{ii} , mayor es la penalización o peso que se le dará al estado x_j para regularlo (llevarlo a cero). Dado que Q es diagonal, esta penalización se hace para cada variable de estado de forma independiente. Pero cuando la matriz Q esta de la forma completa[2].

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1j} \\ q_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ q_{j1} & \ddots & & q_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Se hace la penalización a cada una de las variables de estado, y a su vez a las relaciones que existen entre ellas.

El segundo término que compone el índice de desempeño de la ecuación (3.57) hace parte del esfuerzo de control que se aplica al sistema; el cual trata de transferir el estado de un sistema desde x_0 hasta x_f con un gasto mínimo de energía, y una buena medida para este gasto de energía, esta dado por el índice de la ecuación (3.62) [2].

$$J_2 = \int_0^T (u^T R u) \quad (3.62)$$

Donde R es una matriz hermitica definida positiva y simétrica real. Esta matriz determina el costo energético de la acción de control y los valores que se le dan

a esta; representan el peso que se asigna a cada variable de control en el gasto de energía. Las dimensiones de la matriz R dependen del número de variables de control, que para este caso es único valor; debido a que solo se tiene una señal de control proveniente del motor DC[2].

Se los valores de R son mucho mayores que los valores de Q : La contribución del control u es muy grande comparada con la contribución del estado x . Pero esto hace empeorar el comportamiento de los estados. Se los valores de Q son mucho mayores que los valores de R : Mejora la respuesta del sistema. El vector de variables de estado será penalizado, pero las señales de control u pueden ser muy grandes[2].

En general, cuanto mayor sean los coeficientes, más se optimiza la variable que corresponda. En la mayoría de las aplicaciones, las matrices Q y R son matrices diagonales, por lo que los funcionales J_1 y J_2 adoptan la forma (3.63) y (3.64).

$$J_1 = \int_0^T (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \cdots q_n x_n^2) dt \quad (3.63)$$

$$J_2 = \int_0^T (r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \cdots r_n u_n^2) dt \quad (3.64)$$

Para un sistema con n variables de estado y m señales de entrada. Si el sistema posee una sola entrada, entonces la matriz R se convierte en un escalar, como es el caso del sistema tratado en este trabajo. Luego, si se suman las ecuaciones (3.63) y (3.64), se obtiene la ecuación (3.57) que describe el LQR . [2]

3.6.1. Control óptimo cuadrático empleando multiplicadores de Lagrange

El problema de control óptimo cuadrático es un problema de minimización que involucra una función de varias variables. Por lo tanto, se puede resolver por el método de minimización convencional. El problema de minimización sujeto a restricciones se puede resolver al añadir dichas restricciones a la función a minimizar mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

En el problema de minimización presente, se minimiza J que está dado por la ecuación (3.65).

$$J = \frac{1}{2} x^T(N) S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \quad (3.65)$$

cuando está sujeta a restricciones especificadas por la ecuación (3.66)

$$x(k+1) = \mathbf{G}x(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (3.66)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ y donde la condición inicial del vector de estado se especifica como

$$x(0) = c \quad (3.67)$$

Donde c es una constante. Ahora, al emplear un conjunto de multiplicadores de Lagrange $\lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(N)$, se define un nuevo índice de desempeño L como:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \\ & + \lambda^T(k+1)[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{x}(k+1)] \\ & + [\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) - \mathbf{x}(k+1)]^T \lambda(k+1) \} \end{aligned} \quad (3.68)$$

La razón para escribir los términos que involucran el multiplicador de Lagrange en la forma en que se muestra la ecuación (3.68) es para asegurar que $L = L^T$. (L es una cantidad escalar real.) Observe que $\lambda^T(0)[c - x(0)] + [c - x(0)]^T \lambda(0)$ se puede sumar al índice de desempeño L . Sin embargo no se hará esto, para simplificar la presentación.

Es bien sabido el hecho de que minimizar la función L definida por la ecuación (3.68) es equivalente a minimizar a J definida por la ecuación (3.65) cuando está sujeta a las mismas restricciones definidas por la ecuación (3.66).

Para minimizar la función L , se necesita diferenciar L respecto a cada uno de los componentes de los vectores $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ y $\lambda(k)$ e igualar los resultados a cero. Sin embargo, desde el punto de vista computacional, es conveniente diferenciar a L respecto a $\bar{x}_i(k)$, $\bar{u}_i(k)$ y $\bar{\lambda}_i(k)$, donde $\bar{x}_i(k)$, $\bar{u}_i(k)$ y $\bar{\lambda}_i(k)$ son los complejos conjugados de $x_i(k)$, $u_i(k)$ y $\lambda_i(k)$ respectivamente. (Observe que la señal y su complejo conjugado tiene la misma información matemática.) Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i(k)} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_i(k)} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}_i(k)} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.69)$$

Estas ecuaciones son condiciones necesarias para que L tenga un mínimo. Observe que las expresiones simplificadas para las derivadas parciales anteriores son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{x}(k)} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{u}(k)} &= 0 \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}(k)} &= 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.70)$$

Para la diferenciación parcial de formas cuadráticas complejas y bilineales con respecto a variables vectores, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} x^T A x = A x \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} x^T A y = A y$$

Entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(k)} = 0 : \quad \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^T \lambda(k+1) - \lambda(k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(N)} = 0 : \quad \mathbf{S}\mathbf{x}(N) - \lambda(N) = 0 \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}(k)} = 0 : \quad \mathbf{R}\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}^T \lambda(k+1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}(k)} = 0 : \quad \mathbf{G}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k-1) - \mathbf{x} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.74)$$

La ecuación (3.74) es simplemente, ecuación de estados del sistema. La ecuación (3.72) especifica el valor final del multiplicador de Lagrange. Observe que el multiplicador de Lagrange $\lambda(k)$ se llama a menudo *covector* o *vector adjunto*.

Ahora se simplificarán las ecuaciones obtenidas. De la ecuación (3.71) se tiene

$$\lambda(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^T \lambda(k+1), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.75)$$

con la condición final $\lambda(N) = \mathbf{S}\mathbf{x}(N)$. Al resolver la ecuación (3.73) para $u(k)$ y al observar que \mathbf{R}^{-1} existe, se obtiene

$$u(k) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T \lambda(k+1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.76)$$

La ecuación (3.74) se puede escribir como

$$x(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.77)$$

que es simplemente la ecuación de estado. Al sustituir la ecuación (3.76) en la ecuación (3.77) se tiene

$$x(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T \lambda(k+1) \quad (3.78)$$

con la condición $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$.

Para obtener la solución al problema de minimización, se necesita resolver las ecuaciones (3.75) y (3.78) en forma simultánea. Observe que para el sistema de

ecuaciones, la ecuación (3.77), la condición inicial $x(0)$ está especificada, mientras que para la ecuación del multiplicador de Lagrange, la ecuación (3.75), la condición final $\lambda(N)$ está especificada. Por lo tanto, el problema se convierte en un problema con dos puntos de valores en la frontera.

Si el problema de dos puntos de valores en la frontera se resuelve, entonces el valor óptimo para el vector de estado y para el vector de multiplicadores de Lagrange se puede determinar y el vector de control óptimo $u(k)$ se puede obtener en la forma de lazo abierto. Sin embargo, si se emplea la ecuación de Riccati, el vector de control óptimo $u(k)$ se puede obtener en la forma de lazo cerrado o realimentado:

$$u(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k)$$

donde $\mathbf{K}(k)$ es la matriz de realimentación de rxn .

A continuación, se obtendrá el vector de control óptimo $u(k)$ en la forma lazo cerrado obteniendo, primero, la ecuación de Riccati. Al suponer que $\lambda(k)$ se puede escribir en la siguiente forma:

$$\lambda(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \quad (3.79)$$

donde $\mathbf{P}(k)$ es una matriz Hermítica de nxn (o una matriz simétrica real de nxn). Al sustituir la ecuación (3.79) en la ecuación (3.75) se tiene que

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \quad (3.80)$$

y al sustituir la ecuación (3.79) en (3.78) da

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \quad (3.81)$$

Observe que la ecuación (3.80) y (3.81) no involucran a $\lambda(k)$ y, por lo tanto, se ha eliminado $\lambda(k)$. El proceso empleado aquí se llama *transformación de Riccati*. Dicha transformación es de una importancia extrema para resolver el problema de valores en la frontera con dos puntos.

De la ecuación (3.81) se tiene

$$[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)]\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \quad (3.82)$$

Para sistemas de estado completamente controlable, se puede demostrar que $\mathbf{P}(k+1)$ es definida positiva o semidefinida positiva. Para una matriz $\mathbf{P}(k+1)$ al menos semidefinida positiva se tiene

$$\begin{aligned}
|\mathbf{I}_n + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)| &= |\mathbf{I}_r + \mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}| \\
&= |\mathbf{I}_r + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}| \\
&= |\mathbf{R}^{-1}||\mathbf{R} + \mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}| \neq 0
\end{aligned} \tag{3.83}$$

donde se utilizó la relación

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{A}\mathbf{B}| = -|\mathbf{I}_r + \mathbf{B}\mathbf{A}|, \quad \mathbf{A}=\text{matriz de } n \times n, \quad \mathbf{B}=\text{matriz de } r \times n \tag{3.84}$$

Así, la inversa de $\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)$ existe. En consecuencia, la ecuación (3.82) se puede escribir como:

$$x(k+1) = [\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{3.85}$$

Al sustituir la ecuación (3.85) en la ecuación (3.80), se obtiene

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}^T\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) \tag{3.86}$$

o bien

$$\{\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q} - \mathbf{G}^T\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G}\}\mathbf{x}(k) = 0 \tag{3.87}$$

Esta última ecuación se debe cumplir para toda $x(k)$. Por lo tanto, se debe tener

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{G} \tag{3.88}$$

La ecuación (3.88) se puede modificar. Al utilizar el lema de inversión de matrices

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

y al hacer las sustituciones

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{I} \\
\mathbf{B} &= \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1} \\
\mathbf{D} &= \mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)
\end{aligned}$$

se obtiene

$$[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)]^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}]^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1) \\ = \mathbf{I} - \mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)$$

En consecuencia, la ecuación (3.88) se puede modificar a

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} - \mathbf{G}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} \quad (3.89)$$

La ecuación (3.89) o se equivalente (3.88), se denomina ecuación de Riccati. en referencia a la ecuación (3.72) y (3.79), al observar que $k = N$ se tiene

$$\mathbf{P}(N)\mathbf{x}(N) = \lambda(N) = \mathbf{S}\mathbf{x}(N)$$

o bien

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{S}$$

Por lo tanto, las ecuaciones (3.88) y (3.89) se pueden resolver hacia atrás desde $k = N$ hasta $k = 0$. Esto es, se pueden obtener $\mathbf{P}(N), \mathbf{P}(N-1), \dots, \mathbf{P}(0)$ al comenzar desde $\mathbf{P}(N)$, el cual es conocido.

En referencia a las ecuaciones (3.75) y (3.79), el vector de control óptimo $u(k)$, dado por la ecuación (3.76), se escribe como

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T\lambda(k+1) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{G}^T)^{-1}[\lambda(k) - \mathbf{Q}\mathbf{x}(k)] \quad (3.90)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{G}^T)^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}]\mathbf{x}(k) \quad (3.91)$$

donde

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{G}^T)^{-1}[\mathbf{P}(k) - \mathbf{Q}] \quad (3.92)$$

por lo tanto

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k) \quad (3.93)$$

La ecuación (3.91) proporciona la forma en lazo cerrado, o forma realimentada, para el vector de control óptimo $\mathbf{u}(k)$. Observe que el vector de control óptimo es proporcional al vector de estado. La ecuación (3.93) indica claramente que la ley de

control óptimo requiere la realimentación del vector de estado a través de la ganancia variable en el tiempo $\mathbf{K}(k)$. La figura 3.7 muestra el esquema de control óptimo del sistema regulador basado en el índice de desempeño cuadrático. Es importante apuntar que la ganancia variante en el tiempo $\mathbf{K}(k)$ se puede calcular antes de que el proceso comience, una vez que la matriz de estados \mathbf{G} , la matriz de control \mathbf{H} , y las matrices de peso \mathbf{Q} , \mathbf{R} y \mathbf{S} estén dadas.

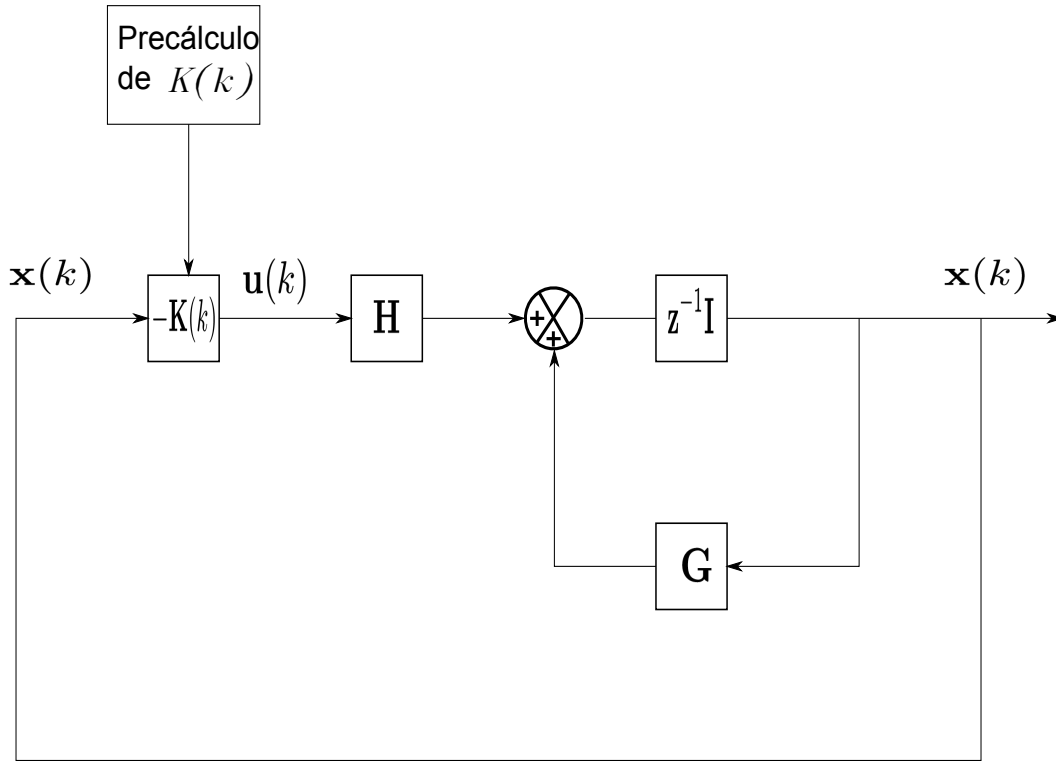


Figura 3.7: Sistema regulador óptimo basado en un índice de desempeño cuadrático.[5]

3.6.2. Control óptimo cuadrático en estado estacionario

La formulación del problema de control para el Regulador Óptimo lineal en tiempo discreto es de la siguiente manera.

Dado el sistema lineal determinístico en las ecuaciones (3.94) y (3.95)

$$x(k+1) = \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_k u_k \quad (3.94)$$

$$y_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k u_k \quad (3.95)$$

Se desea encontrar una ley de control u_k que haga evolucionar al proceso desde $x(0) \neq 0$ a $x(N) = 0$ minimizando el funcional de costo de la ecuación (3.96).

$$J(x, u) = \sum_{K=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] + x_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N \quad (3.96)$$

con S y Q simétricas y semidefinidas positivas y R simétrica y definida positiva. Para encontrar la ley de control u_k , existen diversos métodos, entre los más difundidos están los basados en el principio de optimalidad de Bellman y los que emplean los multiplicadores de Lagrange. Para el caso en que $N \rightarrow \infty$ en la definición de la función de costos (3.96), se tiene una formulación del problema conocida como de estado estacionario donde se puede despreciar el termino cruzado $x_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N$ ya que al ser estable el sistema encontrado este siempre será nulo, la cual admite un procedimiento de cómputo basado en la Teoría de Lyapunov [5][2]. Entonces para cuando $N \rightarrow \infty$ el índice de desempeño se puede modificar a¹.

$$J(x, u) = \sum_{K=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] \quad (3.97)$$

Ahora la matriz en estado estacionario $P(k)$ se define como P , donde la matriz P es una matriz simétrica y definida positiva. La matriz P se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} (\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{G} \\ &= \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Es claro que la matriz \mathbf{P} es determinada por las matrices \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} y \mathbf{R} .

Una expresión ligeramente diferente para \mathbf{P} se puede obtener de la ecuación (3.89)

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{H} (\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \quad (3.99)$$

La matriz de ganancia en estado estacionario \mathbf{K} se puede obtener en terminos de \mathbf{P} como sigue:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{G}^T)^{-1} (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \quad (3.100)$$

Otras formas de expresar \mathbf{K} en términos de \mathbf{P} vendrían dadas por (3.101) y (3.102):

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{G} \quad (3.101)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \quad (3.102)$$

¹El término $\mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N$, que aparece en la ecuación (3.96), no está incluido en la representación de J (3.97). Esto se debe a que, si el sistema regulador óptimo es estable de la forma que el valor de J converge a una constante, $\mathbf{x}(\infty)$ se hace cero y $x(\infty)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(\infty) = 0$ [5]

La ley de control óptimo para la operación en estado estacionario está dada por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (3.103)$$

Si se sustituye la ecuación (3.102) en la ecuación (3.103), se obtiene

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{x}(k) \quad (3.104)$$

Convirtiendo el sistema de control en un sistema regulador óptimo:

$$x(k+1) = [\mathbf{G} - \mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G}] \mathbf{x}(k) \quad (3.105)$$

$$= (\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{x}(k) \quad (3.106)$$

donde se ha utilizado el lema de inversión de matrices,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{I} + \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}$$

con $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}$.

El índice de desempeño J asociado a la ley de control óptimo en estado estacionario se puede obtener de la ecuación del índice de desempeño mínimo $J_{min} = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P}(0) \mathbf{x}(0)$ [5, pág. 575], al sustituir \mathbf{P} por $\mathbf{P}(0)$:

$$J_{min} = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (3.107)$$

En muchos sistemas prácticos, en lugar de utilizar la matriz de ganancia variante en el tiempo $\mathbf{K}(k)$ se aproxima dicha matriz mediante la matriz constante \mathbf{K} . las desviaciones del desempeño óptimo debidas a la aproximación aparecerán sólo cerca del fin del proceso de control.

3.6.2.1. Ecuación de Riccati en estado estacionario

Al implantar el control óptimo en estado estacionario (o invariante en el tiempo), se requiere la solución en estado estacionario de la ecuación de Riccati.

Una forma de resolver la ecuación de Riccati en estado estacionario dada por la ecuación (3.99)

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{H} (\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{G}$$

es comenzar con la ecuación de Riccati en estado estacionario, que fue dada en la ecuación (3.89):

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{H} [\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{G} \quad (3.108)$$

Al invertir la dirección del tiempo, se puede modificar la ecuación (3.108) a

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{H} [\mathbf{R} + \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}(k) \mathbf{G} \quad (3.109)$$

y comenzar la solución con $\mathbf{P}(0) = 0$, e iterar la ecuación hasta obtener una solución en estado estacionario. Al calcular la solución numérica, es importante notar que la matriz \mathbf{P} es una matriz Hermítica o real simétrica y es definida positiva.

3.7. Control óptimo cuadrático *LQR* adaptativo

Como se ha visto anteriormente en el control óptimo se busca la solución a la ecuación de Riccati que se describe en la ecuación (3.109). Se requiere de las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} y de las matrices ampliadas \mathbf{G} y \mathbf{H} , las cuales se obtienen a partir del lazo cerrado del esquema que se muestra 3.8:

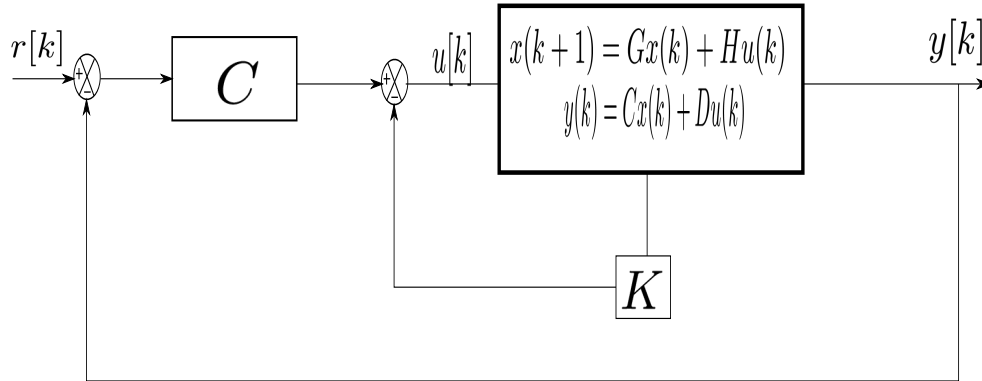


Figura 3.8: Diagrama de bloques sistema de seguimiento.[5]

$$x(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (3.110)$$

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \quad (3.111)$$

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (3.112)$$

$$u(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k) + K_1 v(k) \quad (3.113)$$

donde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \quad (3.114)$$

ya que

$$\begin{aligned}
 v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\
 &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)] \\
 &= -\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + v(k) - \mathbf{C}\mathbf{H}u(k) + r(k+1)
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

se tiene

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \tag{3.116}$$

se supone que la entrada r es una función escalón, es decir $r(k) = r(k+1) = r$
Entonces cuando k se aproxima a infinito,

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \tag{3.117}$$

se define

$$x_e(k) = x(k) - x(\infty) \tag{3.118}$$

$$v_e(k) = v(k) - v(\infty) \tag{3.119}$$

Entonces la ecuación de error se convierte en

$$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u_e(k) \tag{3.120}$$

Observe que

$$u_e(k) = -\mathbf{K}x_e(k) + K_1v_e(k) = -[\mathbf{K} \quad v_e - K_1] \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \tag{3.121}$$

Ahora se define

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.122}$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

$$\hat{K} = [\mathbf{k} \quad k_1] \tag{3.124}$$

$$w(k) = u_e(k) \tag{3.125}$$

Se obtienen las matrices \hat{G} y \hat{H} ampliadas, las cuales dependen directamente de la caracterización del sistema. Se muestra a continuación los enfoques realizados para obtener los controladores óptimos adaptativos, el primero propone la penalización del sistema a partir de la matriz Q haciendo uso del cálculo del error de las variables de estado de interés, el segundo propone obtener la ganancia de realimentación óptima K a partir de la caracterización adaptativa del sistema y de las matrices Q y R fijas para la solución de la ecuación de Ricatti.

3.7.1. Control con Q adaptativo para el enfoque por espacio de estados

La matriz Q penaliza los estados del sistema. Sobre la diagonal se describen las variables de estado a ser penalizadas como se vio en la ecuación (3.59), así es que para el caso del puente grúa se tiene en el primer termino de la diagonal la posición y sobre el segundo termino el ángulo, las cuales son las variables sobre las cuales se realizará el control.

La acción de control busca acercar la variable de estado a la referencia hasta alcanzarla de manera que el error sea cero en estado estacionario, aprovechando este hecho podría pensarse que durante la aproximación existe una relación directa con la penalización de la variable de estado de interés, si se escribe de la forma $(1/\text{error})$. Para el caso del puente grúa se tiene que la referencia de la posición es la deseada por el usuario y la referencia del ángulo debe permanecer en cero.

El cálculo del error estimado se realiza para un tiempo de muestreo de $h = 50ms$:

$$e(k) = r(k) - y(k) \quad \text{error} \quad (3.126)$$

$$ei(k) = ei(k-1) + h * e(k) \quad \text{error de estimación} \quad (3.127)$$

El error en el ángulo debe considerar solo la magnitud:

$$ea = \text{abs}(a) \quad (3.128)$$

Debe considerarse que en el momento de que el error sea cero, la penalización debe mantenerse sobre valor de penalización adecuado, por lo tanto deberá aparecer un valor constate en el momento en el que el error sea cero:

$$Q_{mn} = 1/(ei + c) \quad (3.129)$$

Donde $c \neq 0$ si $ei = 0$.

Se escribe la matriz Q con la penalización adaptativa:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/(ei_x + c_x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(ei_a + c_a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Realizando una descripción del sistema se pueden obtener las matrices \hat{G} y \hat{H} ampliadas, si se establece una matriz R fija unitaria, puede solucionarse finalmente la ecuación de Ricatti.

3.7.2. Control con ganancia óptima de realimentación para el enfoque de controlador con dos grados de libertad

Como se ha visto anteriormente en el capítulo 3, puede describirse el sistema de manera adaptativa a partir de una estimación en línea y sobre este realizar los controladores obteniendo como resultado un control adaptativo 3.4

La solución de la ecuación de Ricatti requiere de la identificación del sistema como se ha dicho previamente, puede decirse entonces que se obtiene la solución en cada grupo de iteraciones durante la identificación adaptativa del sistema, como resultado se logra una ganancia K que es la solución óptima para cada instante de la identificación del sistema. Penalizando con esta ganancia las variables de estado del sistema se obtiene un control óptimo adaptativo.

Con el enfoque visto al final del capítulo 2, para un controlador con dos grados de libertad, se tiene un control por reubicación de polos en espacio de estados el cual es realimentado por la ganancia óptima obtenida la cual penaliza las variables de estado estimadas del sistema y se tiene adicionalmente un controlador en lazo directo por reubicación de polos polinomial con caracterización adaptativa de la función de transferencia del ángulo que actúa directamente sobre dicha variable de estado.

Luego la ecuación (2.107) del controlador de reubicación de polos por espacio de estados, queda como se muestra:

$$u1(k) = Kx(k) + Lgr(k) \quad (3.131)$$

Donde K es la ganancia de realimentación óptima adaptativa y $x[k]$ son las variables estimadas del sistema mediante un observador.

4. RESULTADOS

4.1. Objetivo

Presentación de los resultados obtenidos dentro del marco teórico expuesto en los capítulos precedentes y análisis de resultados.

4.2. Introducción

Para la obtención de resultados se implementaron los controladores descritos en los capítulos anteriores utilizando los modelos matemáticos fijos capítulo 1 y adaptativos capítulo 3, la implementación se hizo tanto en simulación como sobre la planta real. Para obtener la respuesta de cada controlador sobre la posición y el ángulo, se utilizaron dos tipos de señales de referencia, una señal de referencia tipo escalón y una señal de referencia sinusoidal.

La sección 4.3 presenta los resultados de los controladores diseñados en el capítulo 2 para controladores fijos sobre la posición, luego el control de la posición y del ángulo, con el modelo matemático del sistema descrito en el capítulo 1.

La sección 4.4 presenta las respuestas obtenidas de los controladores diseñados a partir de los diseños obtenidos del capítulo 2 y de la adaptación para la caracterización del sistema en línea como se ve en el capítulo 3.

En la primera parte de la sección 4.5 se muestran los resultados de la implementación sobre la simulación de la planta con caracterización fija para diferentes penalizaciones a través de la matriz Q como se vio en el capítulo 3, resolviendo la ecuación de Ricatti con penalización fija de dos estados, penalización fija de toda la diagonal de estados y penalización fija sobre todos los estados e interrelaciones de la matriz Q .

En la segunda parte de la sección 4.5 se muestran los resultados obtenidos a partir de un Q adaptativo con penalización de los estados posición y ángulo adaptativos, como se expuso al final del capítulo 3.

En la tercera parte de la sección 4.5 se muestran los resultados obtenidos bajo el enfoque de la ganancia de realimentación óptima adaptativa como se ha expuesto en el capítulo 3 y del controlador de dos grados de libertad para la aproximación descentralizada del sistema MIMO expuesta a el final del capítulo 2.

La sección 4.6 presenta los resultados obtenidos experimentalmente sobre la planta puente grúa, para el control sobre una variable de estado y finalmente sobre la posición y el ángulo. Adicionalmente se muestran los resultados del control de

la posición ante una señal de seguimiento sinusoidal y del control de la posición angular del péndulo sometido a perturbaciones externas.

En la sección 5 se realizan las conclusiones sobre el trabajo presentado y las discusiones que llevan a plantear el desarrollo de trabajos futuros.

Los resultados obtenidos se presentan de la siguiente manera:

- Resultados de controladores fijos en simulación.
 - Resultados de controladores adaptativos en simulación.
 - Resultados de controladores óptimos fijos y adaptativos en simulación.
 - Resultados de la implementación de controladores fijos y adaptativos en la planta.
1. Resultados frente a una señal escalón de controladores fijos para posición y ángulo sobre simulación 4.3.
 - ▷ Modelo de Referencia, control sobre posición.
 - ▷ Modelo de Referencia y Paso Adelante, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Modelo de Referencia y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Paso Adelante y Paso Adelante, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 2. Resultados frente a una señal de referencia sinusoidal de controladores fijos para posición y ángulo sobre simulación 4.3.
 - ▷ Reubicación de Polos, control sobre posición.
 - ▷ Modelo de Referencia, control sobre posición.
 - ▷ Paso Adelante, control sobre posición.
 - ▷ Reubicación de Polos y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Modelo de Referencia y Paso Adelante, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Modelo de Referencia y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Paso Adelante y Paso Adelante, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 3. Resultados frente a una señal escalón, de controladores adaptativos para posición y ángulo sobre simulación 4.4

- ▷ PID, control sobre posición.
 - ▷ Reubicación de Polos, control sobre posición.
 - ▷ Reubicación de Polos enfoque por espacio de estados, control sobre posición.
 - ▷ PID y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Reubicación de Polos y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Reubicación de Polos enfoque por espacio de estados y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
4. Resultados frente a una señal de referencia sinusoidal, de controladores adaptativos para posición y angulo sobre simulación [4.4](#)
- ▷ PID, control sobre posición.
 - ▷ Reubicación de Polos, control sobre posición.
 - ▷ Reubicación de Polos enfoque por espacio de estados, control sobre posición.
 - ▷ PID y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Reubicación de Polos y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Reubicación de Polos enfoque por espacio de estados y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
5. Resultados frente a una señal escalón, de controladores óptimos para posición y angulo sobre simulación [4.5](#).
- ▷ Control óptimo por acción integral con parámetros fijos penalizando las variables de estado de la posición y el ángulo por medio de la matriz Q .
 - ▷ Control óptimo por acción integral con parámetros fijos penalizando todas las variables de estado (posición, ángulo, velocidad del carro y velocidad del péndulo) por medio de la matriz Q .
 - ▷ Control óptimo por acción integral con parámetros fijos penalizando todas las variables de estado (posición, ángulo, velocidad del carro y velocidad del péndulo) y las relaciones existentes entre las variables de estado en la matriz Q , es decir las posiciones por fuera de la diagonal Q_{mn} con m filas n columnas.
6. Resultados frente a una señal de referencia cuadrada, de controladores óptimos para posición y angulo sobre simulación [4.5](#).

- ▷ Control óptimo fijo con acción integral, penalizando con la matriz Q la posición y el ángulo.
 - ▷ Control óptimo fijo con acción integral, penalizando con la matriz Q todas las variables de estado.
 - ▷ Control óptimo fijo con acción integral, penalizando con la matriz Q todas las variables de estado y sus relaciones.
7. Resultados frente a una señal escalón, de controladores óptimos adaptativos para posición y ángulo sobre simulación 4.5.
- ▷ Reubicación de Polos enfoque por espacio de estados y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
8. Resultados frente a una señal de referencia sinusoidal, de controladores óptimos adaptativos para posición y ángulo sobre simulación 4.5.
- ▷ Reubicación de Polos enfoque por espacio de estados y Reubicación de Polos, control sobre posición y ángulo respectivamente.
 - ▷ Estimación del vector de ganancias K .
9. Resultados frente a una señal impulso, de controladores para posición sobre la planta real 4.6.
- ▷ Acción Integral fijo, control sobre posición.
 - ▷ Reubicación de Polos adaptativo, control sobre posición.
10. Resultados frente a una señal de referencia sinusoidal, de controladores para posición sobre la planta real 4.6.
- ▷ Acción Integral fijo, control sobre posición.
 - ▷ Reubicación de Polos adaptativo, control sobre posición.
 - ▷ Estimación de parámetros.
 - ▷ Reubicación de Polos adaptativo de cuarto orden y Reubicación de polos adaptativo de segundo orden, control sobre la posición y el ángulo respectivamente.

4.3. Resultados para controladores fijos

La obtención de resultados de los controladores fijos, se hizo mediante la implementación de cada uno de los controladores en el entorno de programación MATLAB R2007b y el entorno de programación visual SIMULINK. Para el diseño de cada uno de los controladores se utilizó el modelo matemático descrito en el capítulo 1 donde se describieron las funciones de transferencia para la posición

(1.8) y para el ángulo (1.9), y se hizo la representación por espacio de estado del sistema (1.6) y (1.7), con las cuales se diseñaron los controladores polinomiales y por espacio de estado respectivamente; para finalmente hacer control sobre las variables de estado de la posición y el ángulo, con los controladores descritos de forma general en el capítulo 2 Paso Adelante 2.3.1.1, Modelo de referencia 2.3.1.3 y Reubicación de Polos 2.3.1.4.

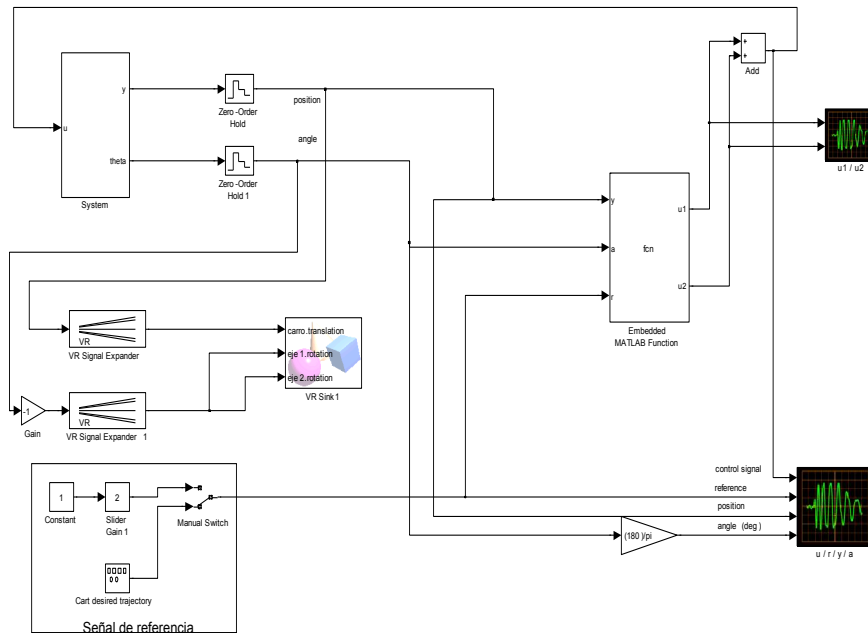


Figura 4.1: Diagrama de bloques en Simulink para la simulación de los controladores fijos.

En la figura 4.1 se muestra el diagrama de bloques diseñado en simulink para la simulación de controladores fijos, donde los bloques:

System: Corresponde a la simulación del modelo matemático no lineal de la planta. **Embedded:** Es un bloque *Fcn* que permite programar dentro del mismo los controladores a utilizar. **Bloques del VRealm (VR):** Entorno gráfico para diseño en 3D. **Señal de referencia:** Se tienen dos opciones para la referencia, para el caso de este documento el generador de señales es una senoide, y el slider corresponde a un escalón. **Retendores de orden cero:** Retiene el valor de la señal para cada tiempo de muestreo.

En la figura 4.2 se muestra la respuesta del controlador Modelo de Referencia; durante un tiempo de 50s, el cual realiza una acción de control sobre la posición y lo lleva a la referencia escalón, en un tiempo de establecimiento de 10 s.

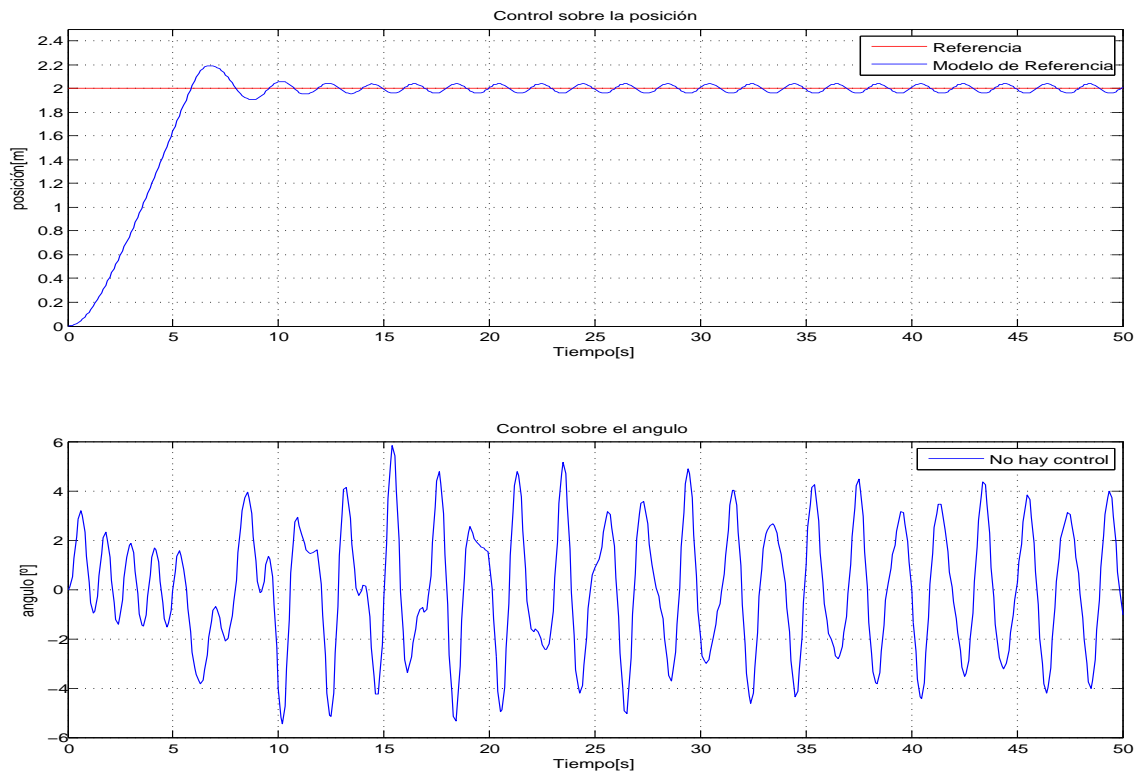


Figura 4.2: Respuesta controlador Modelo de Referencia fijo para posición frente a un impulso.

Ya que es un sistema acoplado, la apertura angular del péndulo se ve afectado por el movimiento del carro durante la acción de control, en la figura 4.2. Finalmente después del tiempo de establecimiento el péndulo sigue oscilando consecuencia de las oscilaciones del carro.

En la figura 4.3 se presentan los controladores Modelo de Referencia, Paso Adelante y Reubicación de Polos, con los cuales se ejecutó una acción de control sobre la posición y el ángulo, realizando combinaciones entre los controladores, con el objeto de comparar los resultados obtenidos, tiempo de establecimiento, y control sobre la posición y el ángulo.

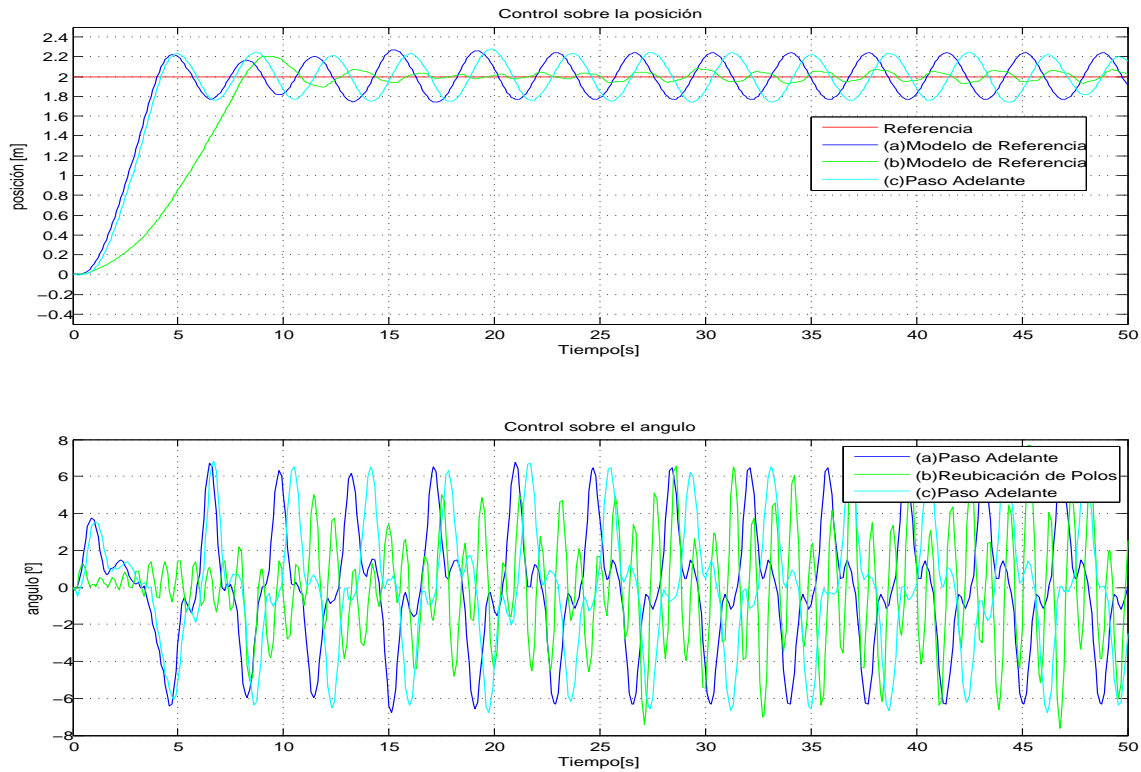


Figura 4.3: Respuesta de los controladores fijos para posición y ángulo frente a un impulso, referencia de color rojo. Las combinaciones de los controladores para posición y ángulo corresponden a: azul (a) Modelo de Referencia y Paso Adelante respectivamente, verde (b) Modelo de Referencia y Reubicación de Polos respectivamente, cian (c) Paso Adelante y Paso Adelante respectivamente.

Aunque el controlador (b) tiene un tiempo de establecimiento mayor que los controladores (a) y (c) la posición se mantiene más cercana a la referencia respecto de los otros controladores oscilando entre $\pm 0.1m$, además la acción de control que se ejerce sobre el ángulo no genera perturbaciones sobre la posición a diferencia de los controladores (a) y (c).

La regulación sobre el ángulo existe para los tres controladores, el control de (b) sobre el ángulo se mantiene más cercano a la referencia $\pm 1^\circ$ respecto a (a) y (c), sin embargo la regulación sobre el ángulo no es aceptable.

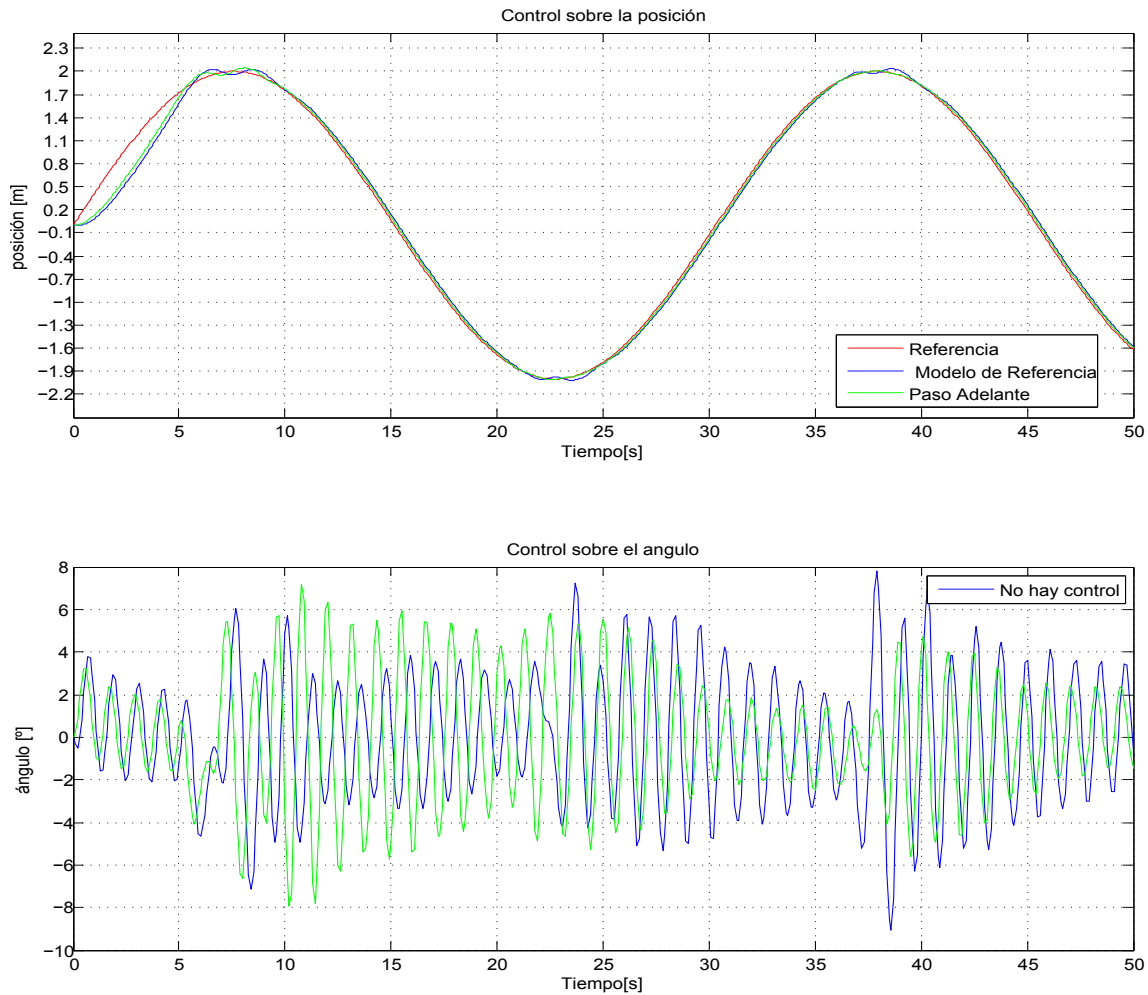


Figura 4.4: Respuesta de los controladores fijos para posición con una referencia sinusoidal de color rojo. las señales de los controladores para posición Modelo de Referencia en color azul, y Paso Adelante en color verde.

En la figura 4.4 se presentan los controladores Modelo de Referencia y Paso Adelante, con los cuales se ejecutó una acción de control sobre la posición para una referencia sinusoidal. Se efectúa un control de la posición que sigue fielmente la referencia.

En la figura 4.5 se presentan los controladores Modelo de Referencia, Paso Adelante y Reubicación de Polos, con los cuales se ejecutó una acción de control sobre la posición y el ángulo, realizando combinaciones entre los controladores (a, b y c), para una referencia sinusoidal.

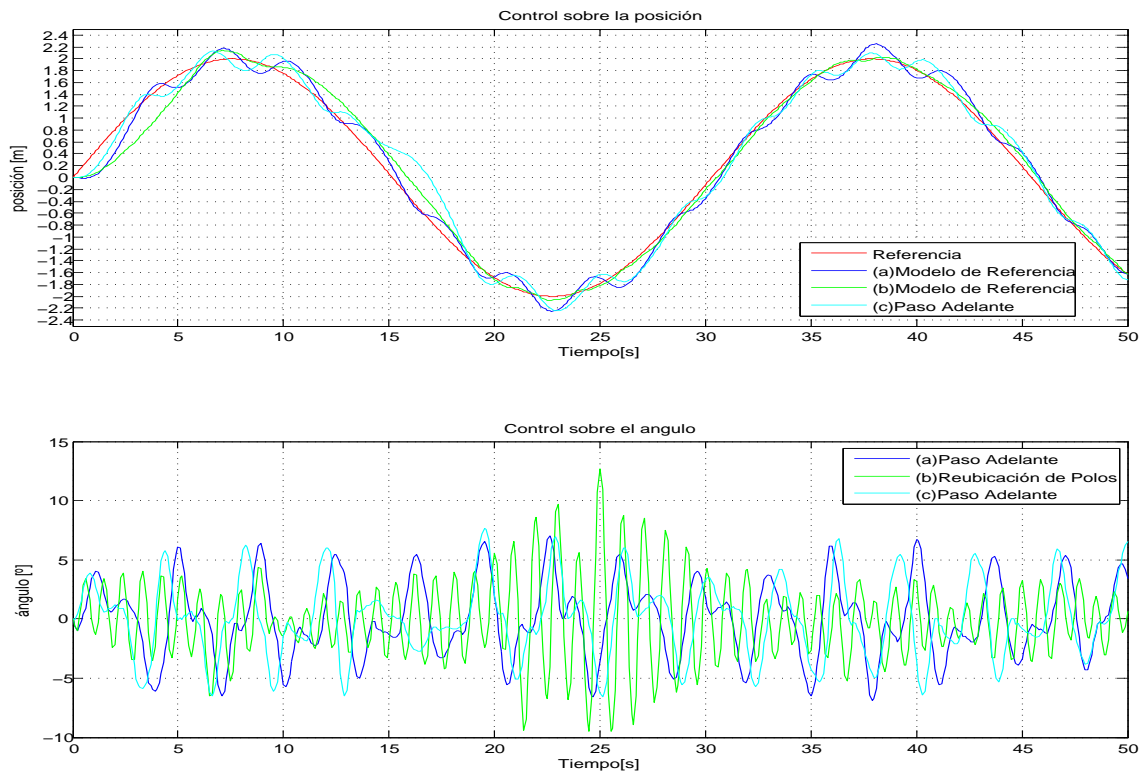


Figura 4.5: Respuesta de los controladores fijos para posición y ángulo con una referencia sinusoidal de color rojo. Las combinaciones de los controladores para posición y ángulo corresponden a: azul (a) Modelo de Referencia y Paso Adelante respectivamente, verde (b) Modelo de Referencia y Reubicación de Polos respectivamente, cian (c) Paso Adelante y Paso Adelante respectivamente.

El controlador (b) procura llevar el carro a la referencia de manera menos perturbada, a diferencia de los otros dos controladores, que se preocupan por llevar más rápido el carro a la referencia introduciendo oscilaciones debido al movimiento del péndulo, el controlador (b) al alcanzar la referencia se ve enfrentado a la inercia del péndulo, este cambio de la referencia introduce una perturbación sobre el ángulo, sin embargo la acción de control sobre éste, hace regulación sin llegar a ser muy buena.

4.4. Resultados para controladores adaptativos

La obtención de resultados de los controladores adaptativos, se hizo mediante la implementación de cada uno de los controladores en el entorno de programación MATLAB R2007b y el entorno de programación visual SIMULINK. Para el diseño de cada uno de los controladores se utilizó la caracterización del sistema en línea que se describió en el capítulo 3, donde cada uno de los coeficientes del vector $\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n]$, son estimados para cada instante de tiempo, coeficientes o parámetros con los cuales se construyeron las funciones de transferencia del sistema y se diseñaron los controladores como se vio en el capítulo 2 para finalmente hacer control sobre las variables de estado de la posición y el ángulo, con los controladores descritos de forma general en el capítulo 2, PID 2.3.2.2, Reubicación de Polos 2.3.1.4 y Reubicación de Polos por espacio de estados 2.4.2.

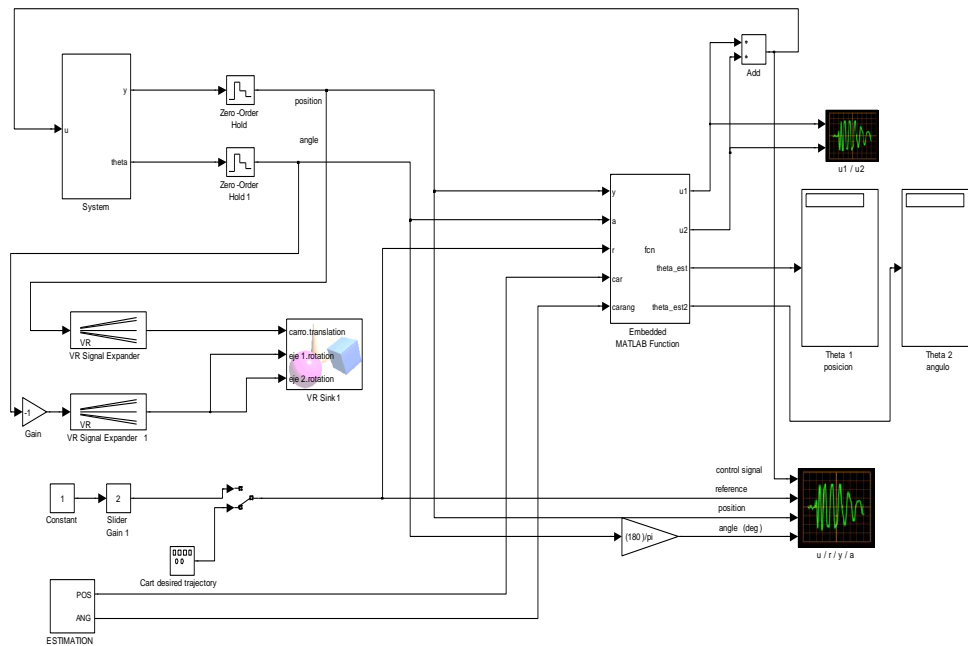


Figura 4.6: Diagrama de bloques en Simulink para la simulación de los controladores adaptativos.

En la figura 4.6 se muestra el diagrama de bloques diseñado en simulink para la simulación de controladores fijos, donde los bloques:

System: Corresponde a la simulación del modelo matemático no lineal de la planta. Embedded: Es un bloque Fcn que permite programar dentro del mismo los controladores a utilizar. Bloques del VRealm (VR): Entorno gráfico para diseño en 3D. Señal de referencia: Se tienen dos opciones para la referencia, para el caso de este documento el generador de señales es una senoide, y el slider corresponde a

un escalón. Retendores de orden cero: Retiene el valor de la señal para cada tiempo de muestreo. Estimación: Genera “case” posibles a usar dentro del embedded, para la estimación de los parámetros en línea. Display theta 1 y theta 2: Muestra los parámetros estimados.

En la figura 4.7 se pueden observar las respuestas de los controladores PID, Reubicación de Polos polinomial y Reubicación de Polos por espacio de estados para el control sobre la posición frente a una referencia escalón.

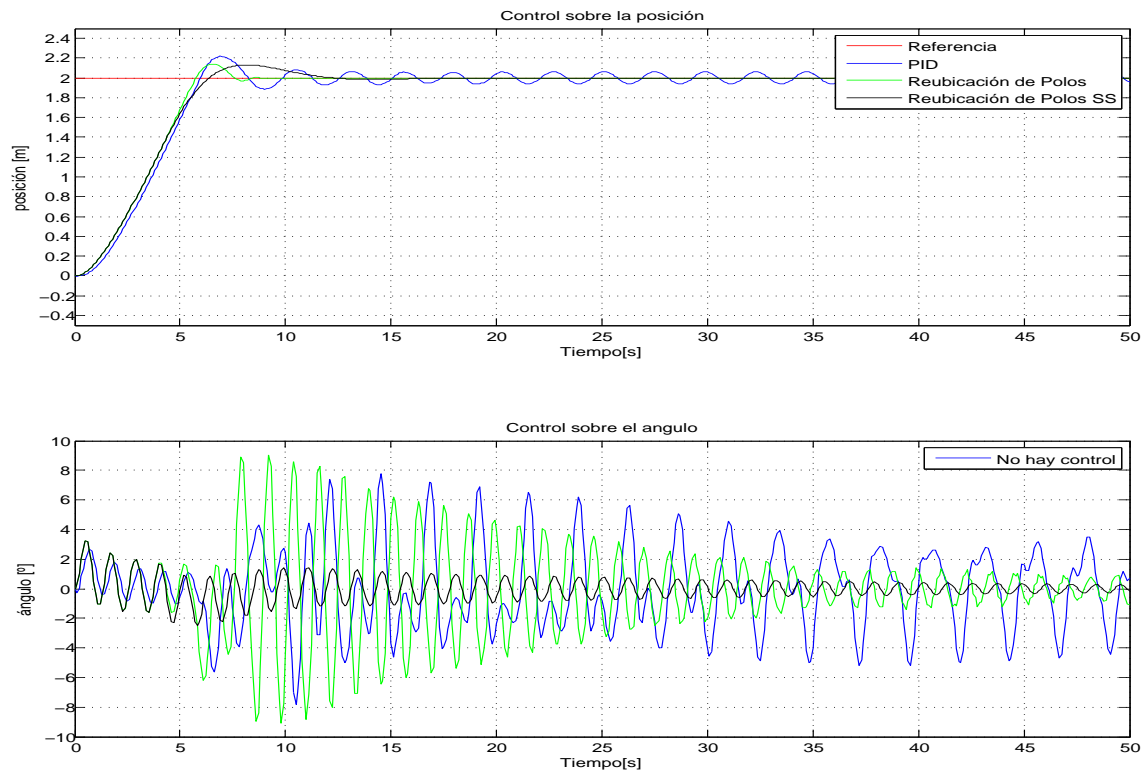


Figura 4.7: Respuesta de los controladores adaptativos para posición frente a una referencia impulso de color rojo. las señales de los controladores para posición PID en color azul, Reubicación de Polos en color verde y Reubicación de Polos en espacio de estados en color negro.

Se puede observar que los tres controladores se mantienen cercanos a la referencia, sin embargo el controlador Reubicación de Polos por espacio de estados, debido a que tiene un observador de estados (ver sección 2.4) presenta una mejor respuesta para la variables a controlar; por lo tanto estaría más cerca de la referencia para

todos los estados del sistema. El tiempo de establecimiento es mayor puesto que está considerando todas las demás variables del sistema, ángulo, velocidad lineal y velocidad angular, como se dijo anteriormente.

En la figura 4.8 se pueden observar las respuestas de los controladores PID, Reubicación de Polos polinomial y Reubicación de Polos por espacio de estados, con los cuales se ejecutó una acción de control sobre la posición y el ángulo, realizando combinaciones entre los controladores (a, b y c), para una referencia escalón.

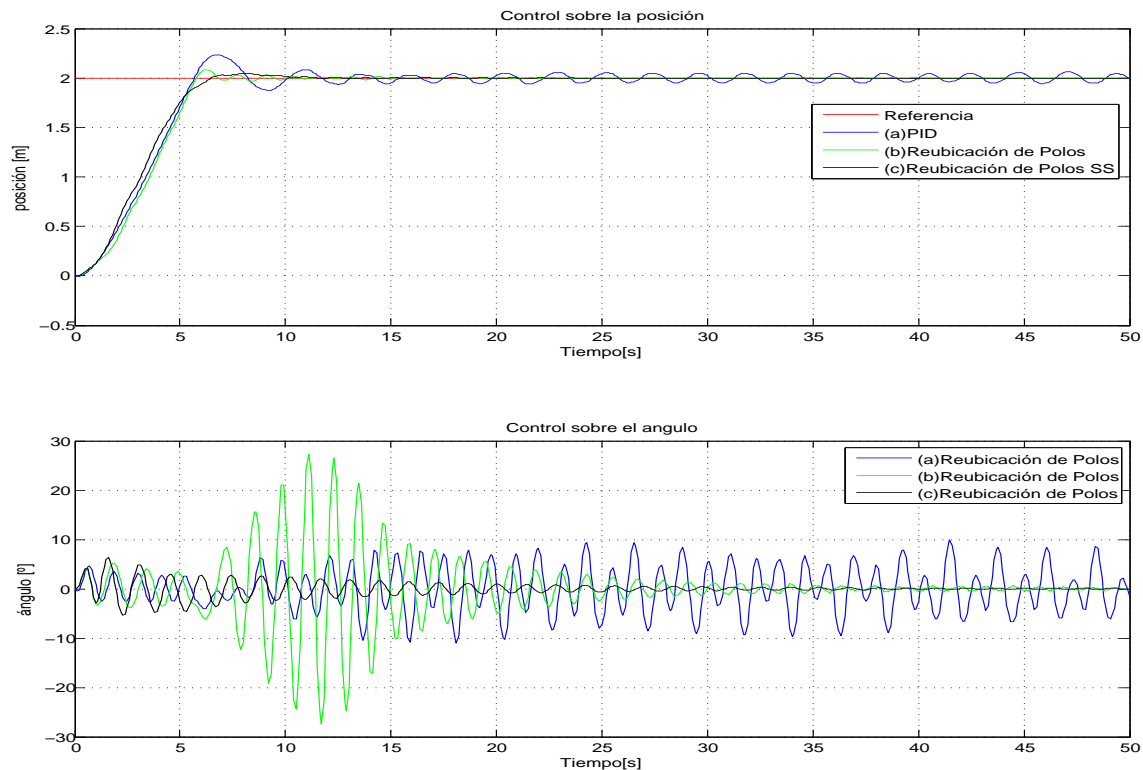


Figura 4.8: Respuesta de los controladores adaptativos para posición y ángulo frente a un impulso. Las combinaciones de los controladores para posición y ángulo corresponden a: azul (a) PID y Reubicación de Polos respectivamente, verde (b) reubicación de polos y Reubicación de Polos respectivamente, cián (c) Reubicación de Polos por espacio de estados y Reubicación de Polos respectivamente.

Introduciendo control sobre el ángulo mediante el controlador Reubicación de Polos, se obtienen mejores respuestas para los tres casos, para el caso del control de la posición mediante el controlador (c), se llega más rápido a la referencia y se obtiene

un menor sobrepaso $0.05m$, enfrentado a $0.1m$ que alcanza (b), de forma semejante puede observarse que para el controlador (b), el sobrepaso se reduce, se espera como en el caso anterior figura 4.7, que ocurra una perturbación sobre el ángulo después del tiempo de establecimiento, producto de la estabilización de la posición sobre la referencia a diferencia del caso anterior si se efectúa un control sobre el ángulo, que finalmente lo lleva a la referencia.

El controlador PID presenta oscilaciones, debido a que es un controlador de segundo orden y no representa fielmente al sistema. Se ejecuta un control sobre el ángulo pero la perturbación persiste después de los $10s$ dado a que las oscilaciones para la posición no se minimizaron completamente.

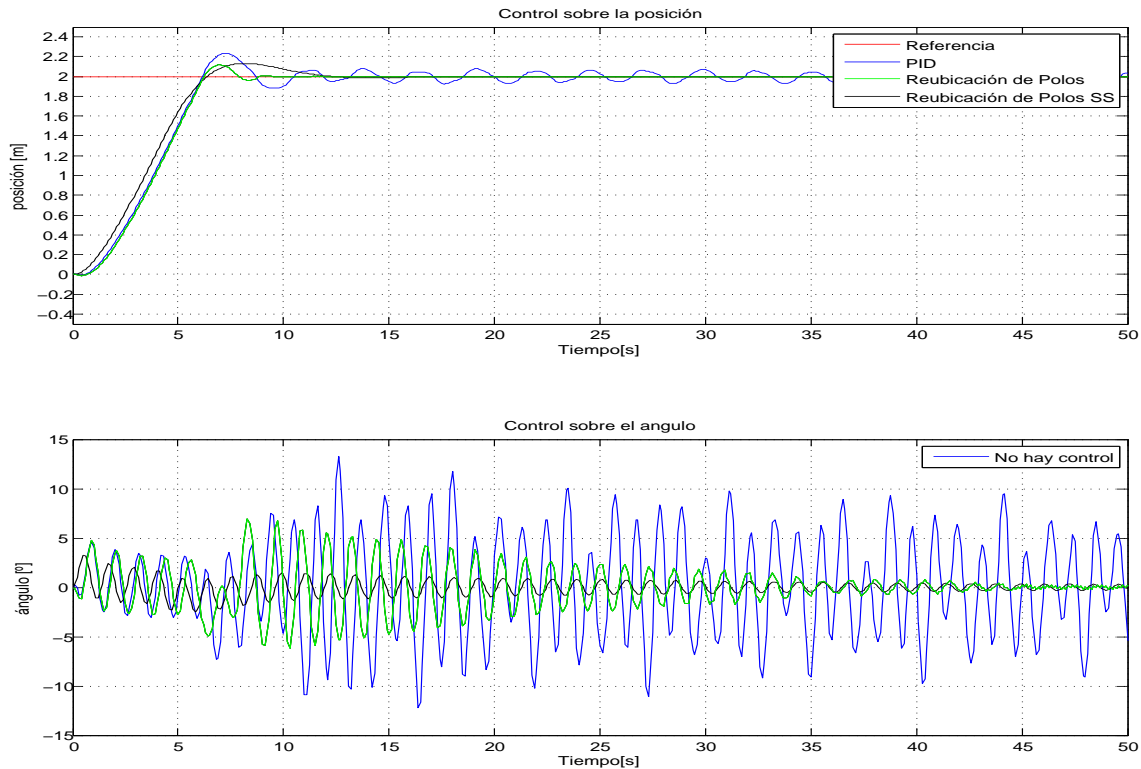


Figura 4.9: Respuesta de los controladores adaptativos para posición con ajuste de parámetros al inicio de la adquisición de datos. las señales de los controladores para posición PID en color azul, Reubicación de Polos en color verde y Reubicación de Polos en espacio de estados en color negro.

Para los controladores por reubicación de polos en espacio de estados y polinomial,

en lo referente al control sobre la posición, se recomienda el controlador polinomial ya que las pequeñas oscilaciones que se presentan se pueden mejorar, incluso eliminarse al hacer un ajuste, en la inicialización de los parámetros que caracteriza el vector theta, ya que la inicialización para los resultados de la figura 4.8 fue obtenida de manera aleatoria, mientras que para figura 4.9, se hizo la inicialización a través del modelo matemático por espacio de estados (1.6) y (1.7) capítulo (1). Ya que el algoritmo con el cual se hace la caracterización en tiempo real está más cercano a la solución al inicializarse con los parámetros del modelo matemático, o con unos parámetros obtenidos con una identificación del sistema fuera de línea, el controlador llega más rápido a la respuesta.

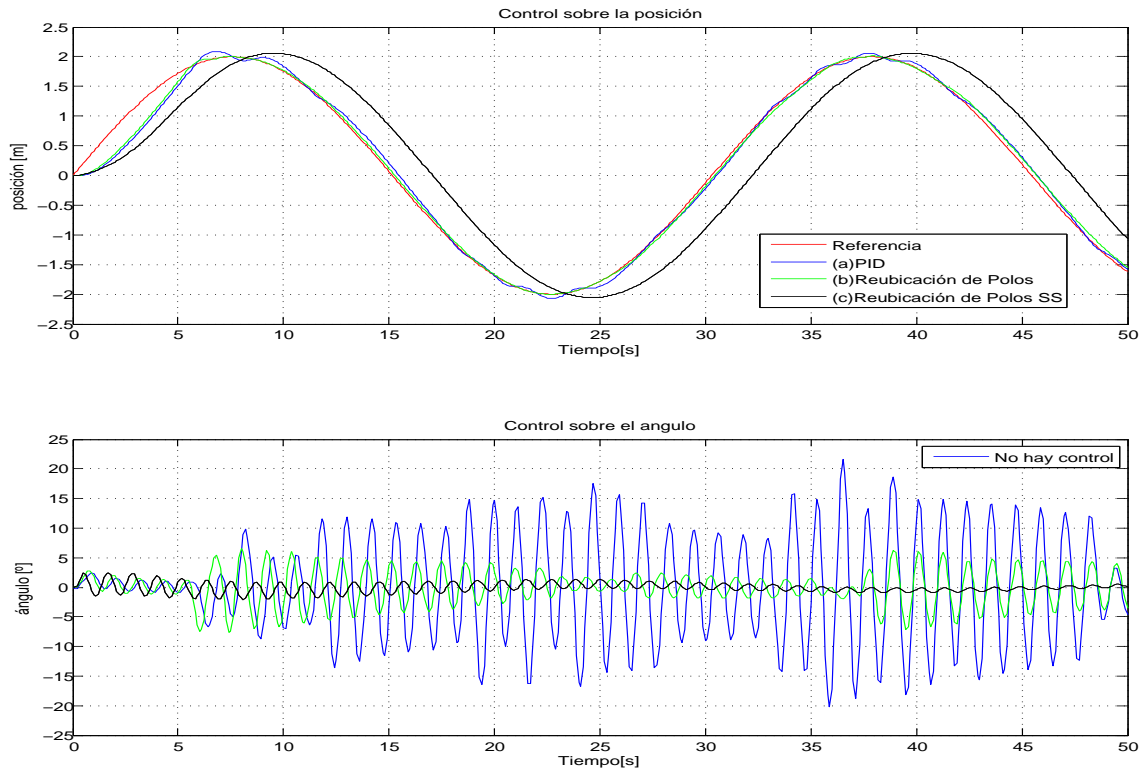


Figura 4.10: Respuesta de los controladores adaptativos para posición con una referencia sinusoidal de color rojo. las señales de los controladores para posición PID en color azul, Reubicación de Polos en color verde y Reubicación de Polos en espacio de estados en color negro.

En la figura 4.10 se pueden observar las respuestas de los controladores PID,

Reubicación de Polos polinomial y Reubicación de Polos por espacio de estados para el control sobre la posición frente a una referencia sinusoidal.

El controlador PID y Reubicación de Polos polinomial, presentan una respuesta fiel a la referencia para el control de la posición, ambas alcanzan la referencia y sin mayor diferencia en el tiempo de establecimiento de aproximadamente $8s$, aunque el controlador de Reubicación de Polos es superior por su respuesta con poco sobrepaso y no introduce mayores perturbaciones en el ángulo, caso contrario del PID.

Como se ha visto en los resultados anteriores el controlador Reubicación de Polos por espacio de estados, es un controlador que hace control sobre todas las variables del sistema, emula la referencia pero no alcanza la referencia para una señal de alta frecuencia como la que se muestra en la figura 4.10.

En la figura 4.11 se pueden observar las respuestas de los controladores PID, Reubicación de Polos polinomial y Reubicación de Polos por espacio de estados, con los cuales se ejecutó una acción de control sobre la posición y el ángulo, realizando combinaciones entre los controladores (a, b y c), para una referencia sinusoidal.

En el caso del controlador (b) puede notarse que para la posición hay un mayor sobrepaso, que el presentado en la figura 4.10, aun así se mantiene cercano a la referencia, a diferencia del caso anterior donde no se hace control sobre el ángulo en la figura 4.11 puede observarse la cercanía del ángulo sobre la referencia, producto de la acción de control.

En el caso del controlador (a) debido a las perturbaciones introducidas por el control de la posición la acción de control sobre el ángulo no presenta una buena regulación. La respuesta del controlador (c) es la esperada para el caso de la posición, y la introducción de un controlador por Reubicación de Polos polinomial mejora la respuesta para el ángulo.

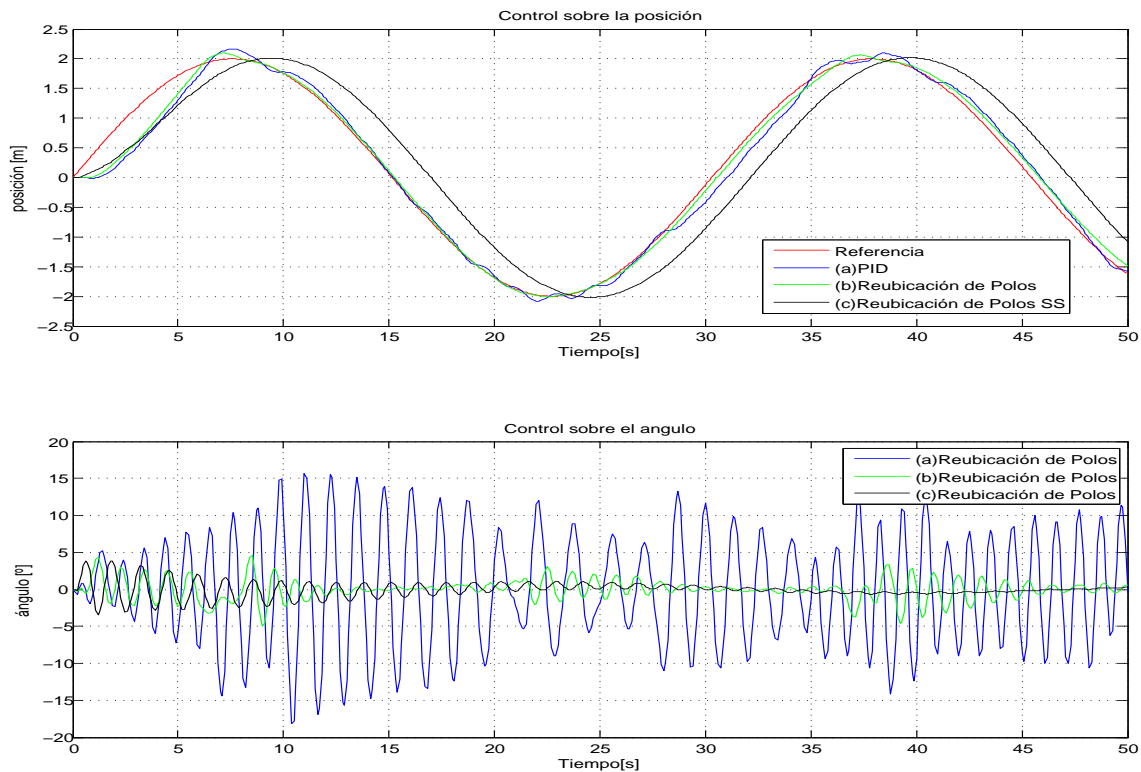


Figura 4.11: Respuesta de los controladores adaptativos para posición y ángulo con señal de referencia sinusoidal de color rojo. Las combinaciones de los controladores para posición y ángulo corresponden a: azul (a) PID y Reubicación de Polos respectivamente, verde (b) reubicación de polos y Reubicación de Polos respectivamente, cian (c) Reubicación de Polos por espacio de estados y Reubicación de Polos respectivamente.

4.5. Resultados de controladores óptimos fijos y adaptativos

La obtención de resultados de los controladores óptimos fijos, se hizo mediante la implementación de cada uno de los controladores en el entorno de programación MATLAB R2007b y SIMULINK.

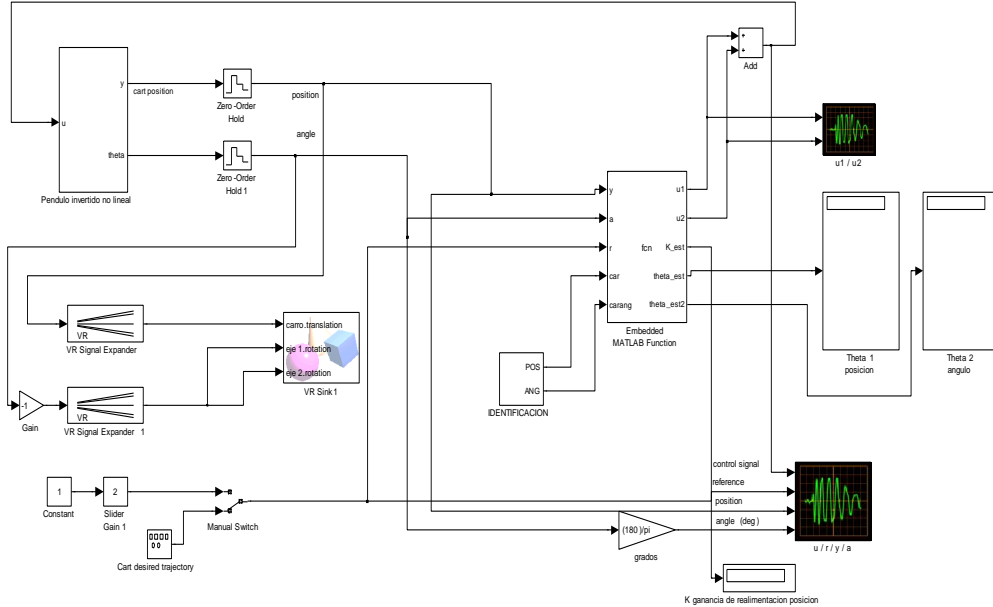


Figura 4.12: Diagrama de bloques en Simulink para la simulación de los controladores óptimos adaptativos.

En la figura 4.12 se muestra el diagrama de bloques diseñado en simulink para la simulación de controladores fijos, donde los bloques:

System: Corresponde a la simulación del modelo matemático no lineal de la planta. **Embedded:** Es un bloque Fcn que permite programar dentro del mismo los controladores a utilizar. **Bloques del VRealm (VR):** Entorno gráfico para diseño en 3D. **Señal de referencia:** Se tienen dos opciones para la referencia, para el caso de este documento el generador de señales es una senoide, y el slider corresponde a un escalón. **Retendores de orden cero:** Retiene el valor de la señal para cada tiempo de muestreo. **Estimación:** Genera "case" posibles a usar dentro del embedded, para la estimación de los parámetros en linea. **Display theta 1 y theta 2:** Muestra los parámetros estimados. **Display ganancia óptima:** Muestra los parámetros estimados de K.

Se realizan los controladores en simulación con la caracterización fija vista en el capítulo 1, para un controlador con acción integral, en donde se resuelve la ecuación de Ricatti introduciendo las matrices ampliadas fijas del sistema, como se ha visto al final del capítulo 3 y la penalización de las variables de estado con penalización fija en el primer caso, de dos estados posición y ángulo, para el segundo con penalización fija de toda la diagonal de estados y en el tercer caso con penalización fija sobre todos los estados e interrelaciones de la matriz Q^1 y una matriz R unitaria.

¹las matrices de penalización Q, fueron extraídas de la referencia citada [2]

$$Q_{PosAng} = \begin{bmatrix} 32.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 939.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$Q_{Diagonal} = \begin{bmatrix} 462.29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 312.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 928.87 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$Q_{Completo} = \begin{bmatrix} 509.5 & 165.9 & 267.06 & 253.23 \\ 165.9 & 987.85 & 946.86 & 57.28 \\ 267.06 & 946.86 & 425.47 & 57.4 \\ 253.23 & 57.28 & 57.24 & 984.4 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

En la figura 4.13 se presentan los resultados obtenidos mediante un controlado óptimo fijo con acción integral para una referencia escalón, con diferentes matrices de costos para la penalización de las variables de estado. En la respuesta para Q completo, donde se penalizan todas las variables de estado y las relaciones existentes entre las ellas se presentan mejores respuestas para cada uno de los estados del sistema frente a las otras penalizaciones realizadas con Q diagonal y Q para posición y ángulo.

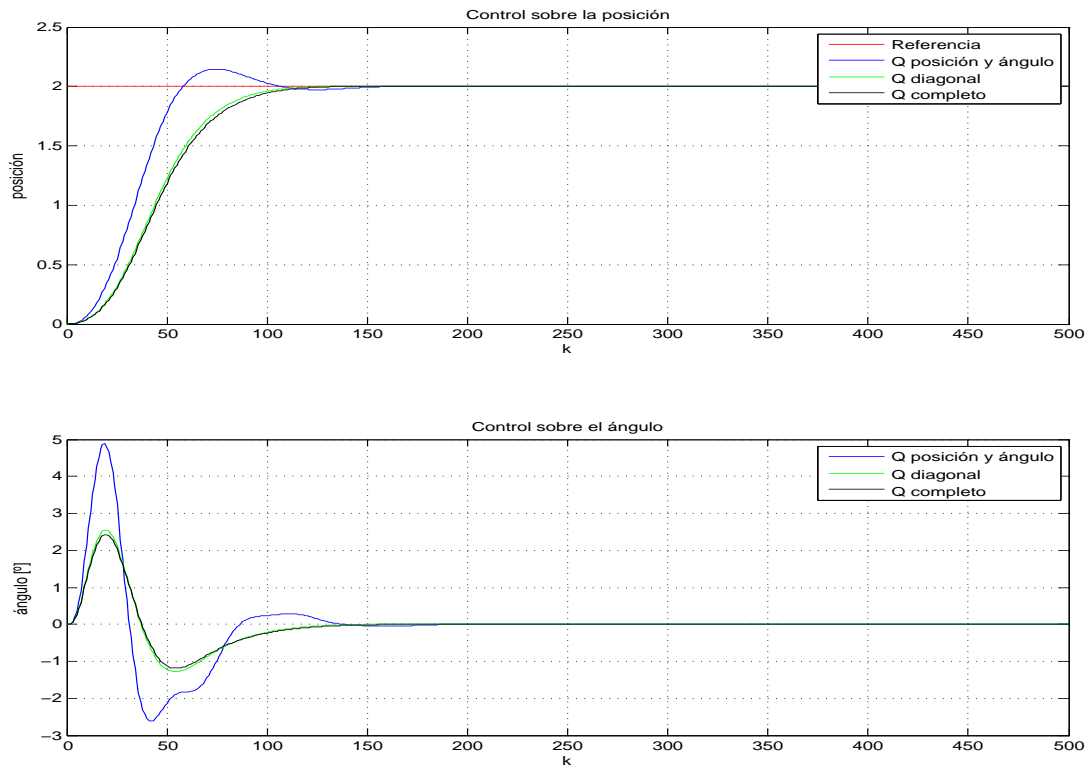


Figura 4.13: Respuesta del controlador acción integral óptimo fijo para la posición y el ángulo.

En la figura 4.14 se presentan los resultados obtenidos mediante un controlado óptimo fijo con acción integral para una señal de referencia cuadrada, con diferentes matrices de costos para la penalización de las variables de estado. Puede observarse que todos los controladores alcanzan la referencia para la posición, minimizando los cambios bruscos introducidos por la referencia sobre del ángulo durante la trayectoria, presentando mejor respuesta a estas condiciones la penalización que contiene todos los estados y relaciones del sistema.

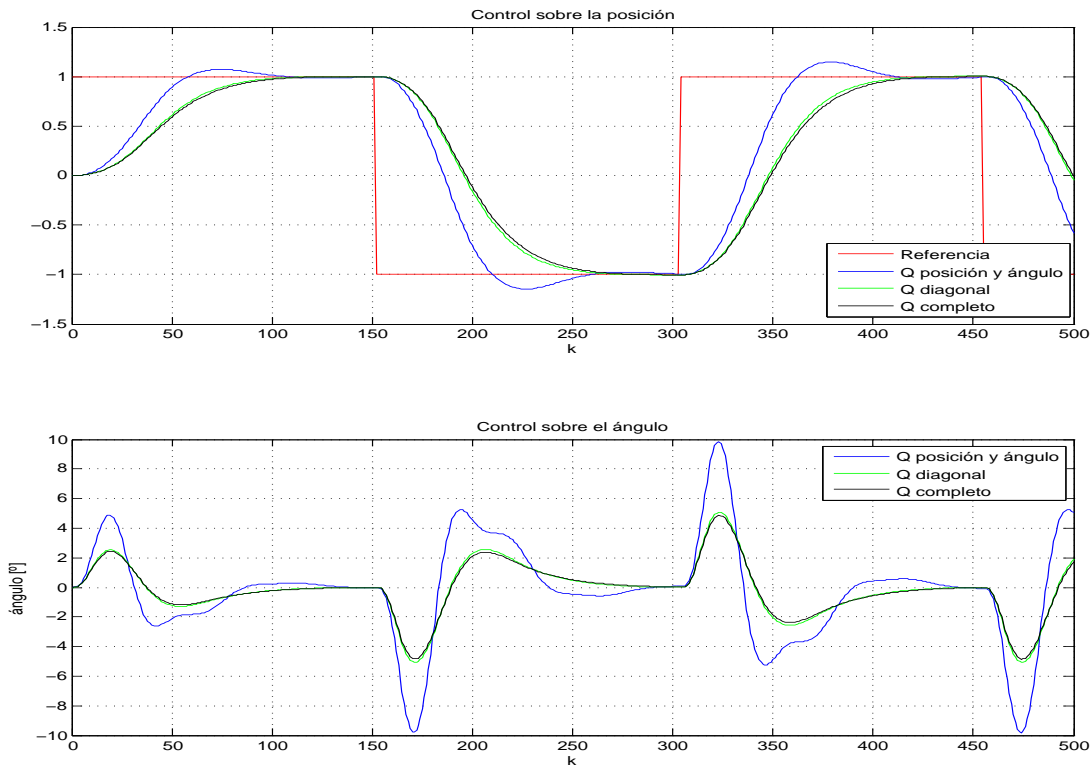


Figura 4.14: Respuesta del controlador acción integral óptimo fijo para la posición y el ángulo, para una señal de referencia cuadrada.

En la figura 4.15 se presenta la comparación para una señal de referencia tipo escalón entre control óptimo adaptativo y control adaptativo, ambos descritos por la técnica Reubicación de Polos por espacio de estados con observador, y con método de caracterización adaptativo para posición y para ángulo, el controlador óptimo tiene una ganancia de realimentación K calculada como se mostró en capítulo 3.

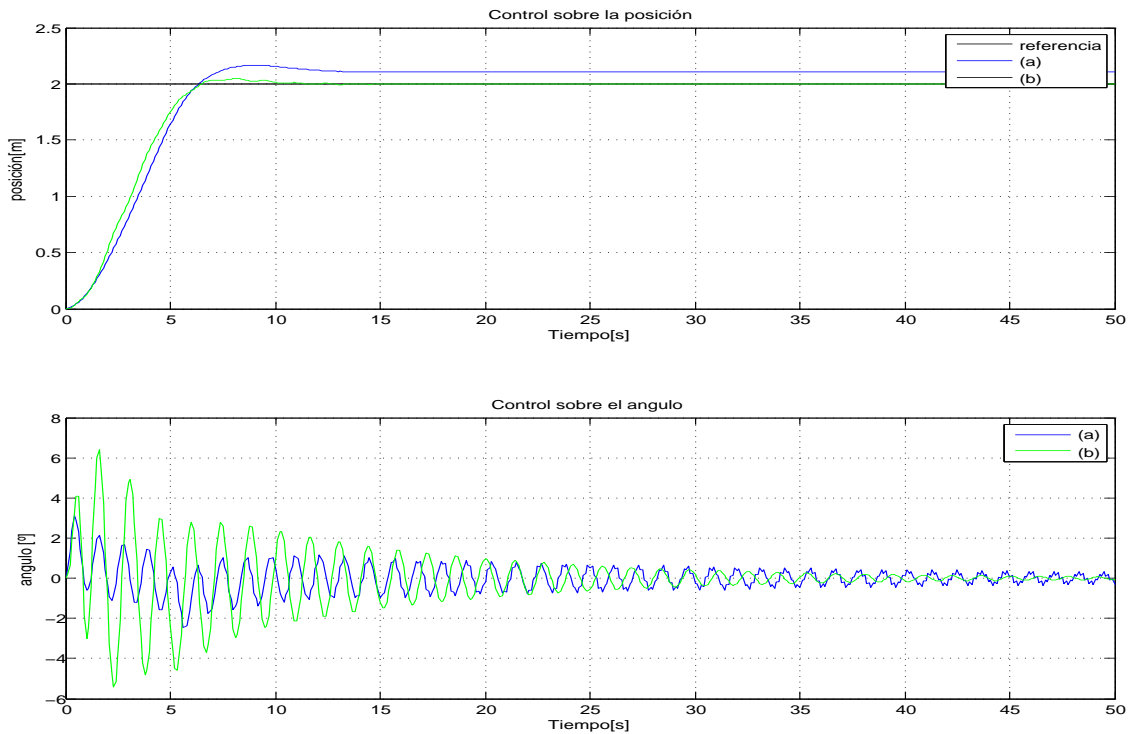


Figura 4.15: Respuesta de los controladores adaptativos para posición y ángulo para una señal de referencia escalón.

En la figura puede observarse que el controlador Reubicación de Polos por espacio de estados adaptativo (b) alcanza la referencia y tiene un tiempo de establecimiento menor que el controlador Reubicación de Polos por espacio de estados adaptativo óptimo (a), para posición. En el caso del Ángulo el controlador (a) tiene menores oscilaciones que el controlador (b) durante el tiempo de establecimiento, sin embargo en el transcurso del tiempo de operación el controlador (b) mejora su respuesta para el ángulo respecto a (a). Se puede concluir que el controlador (a), no presenta una respuesta mejor para escalón que el controlador (b).

En la figura 4.16 se presenta la comparación para una señal de referencia sinusoidal entre control óptimo adaptativo y control adaptativo, ambos descritos por la técnica Reubicación de Polos por espacio de estados con observador, y con método de caracterización adaptativo para posición y para ángulo.

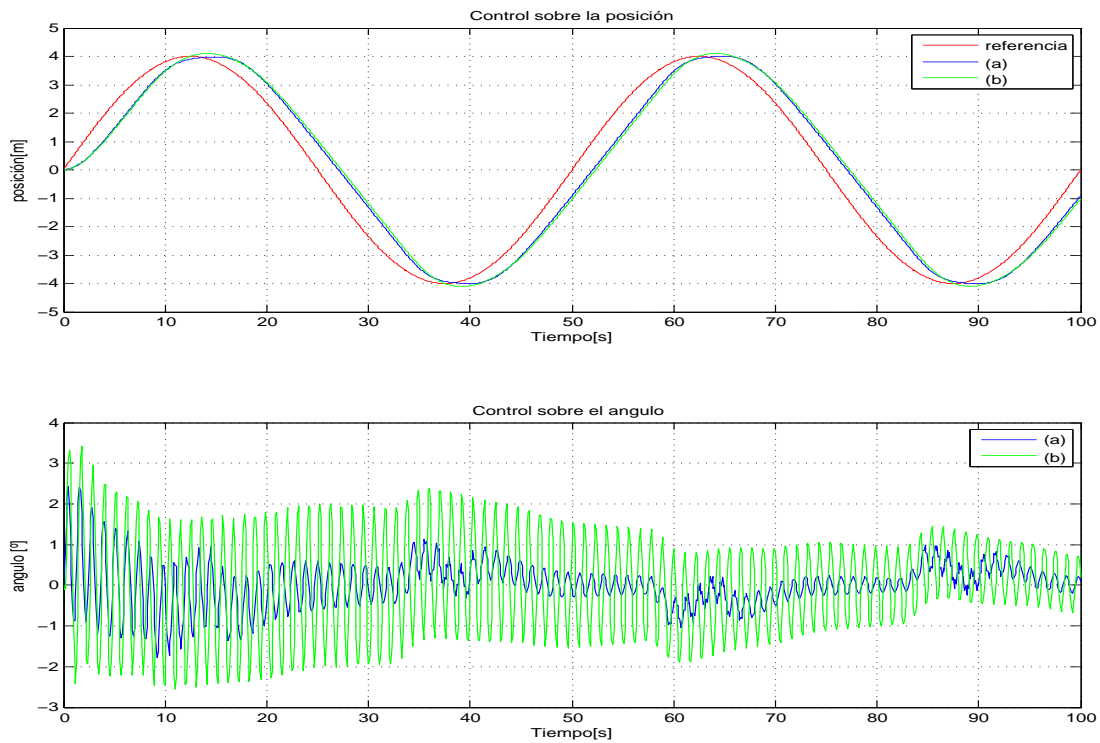


Figura 4.16: Respuesta de los controladores adaptativos para posición y ángulo para una señal de referencia sinusoidal.

Se puede apreciar que ambas respuestas para posición son fieles a la referencia aunque presentan un desfase de $3s$ (ver solución a este comportamiento figura 4.17), en cuanto al control del ángulo para ambas respuestas se puede notar cierta mejoría del controlador (a) respecto al controlador (b), manteniendo más cerca de cero la posición del péndulo para el tiempo de ejecución de los controladores.

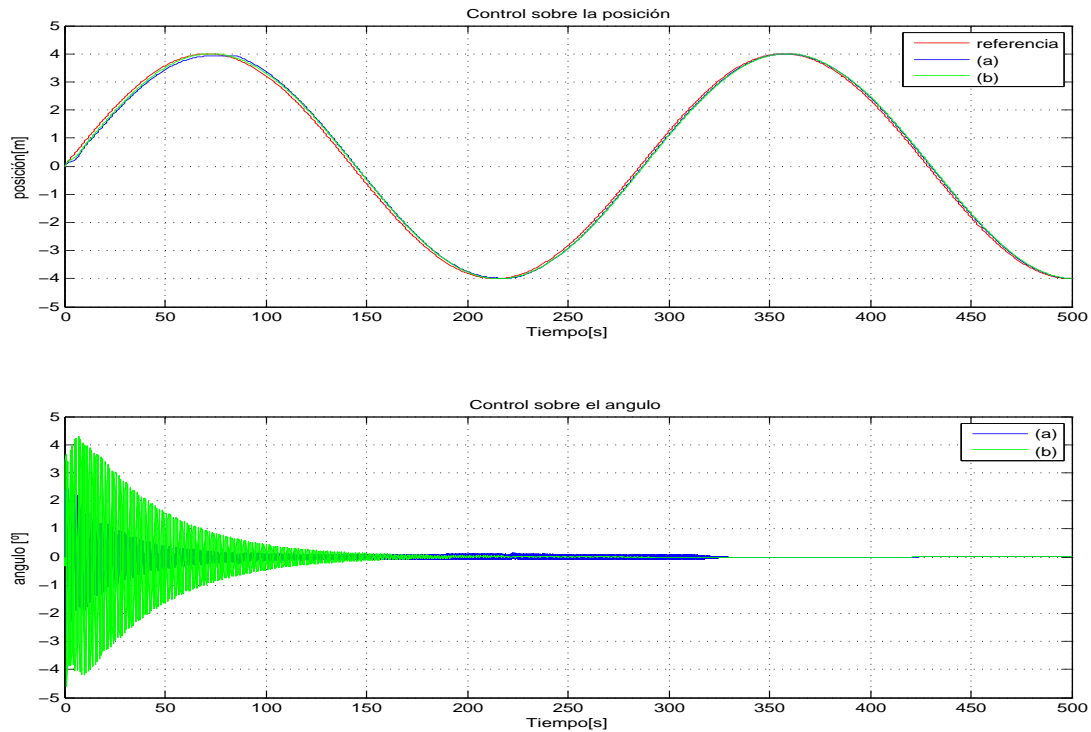


Figura 4.17: Respuesta de los controladores adaptativos para posición y ángulo para bajas frecuencias.

Como se pudo observar en la figura 4.16, los controladores para el control de la posición no lograron seguir la referencia de manera muy cercana, sin embargo esto se podría mejorar si se utilizara una referencia con una frecuencia menor, la frecuencia utilizada en la referencia de los resultados mostrados en la figura 4.16 fue de 0.033 Hz. En la figura 4.17 se muestran los resultados obtenidos con una frecuencia menor, de 0.0035 Hz, donde ambos controladores se aproximan más a la referencia y logran hacer un control muy bueno sobre el ángulo.

En la figura 4.18 se muestran las señales de control y la adquisición de la ganancia de realimentación para el controlador (a). La estimación de la ganancia de realimentación se realiza de manera adaptativa a partir de la caracterización del sistema escrito en forma canónica controlador, y de las matrices Q y R .

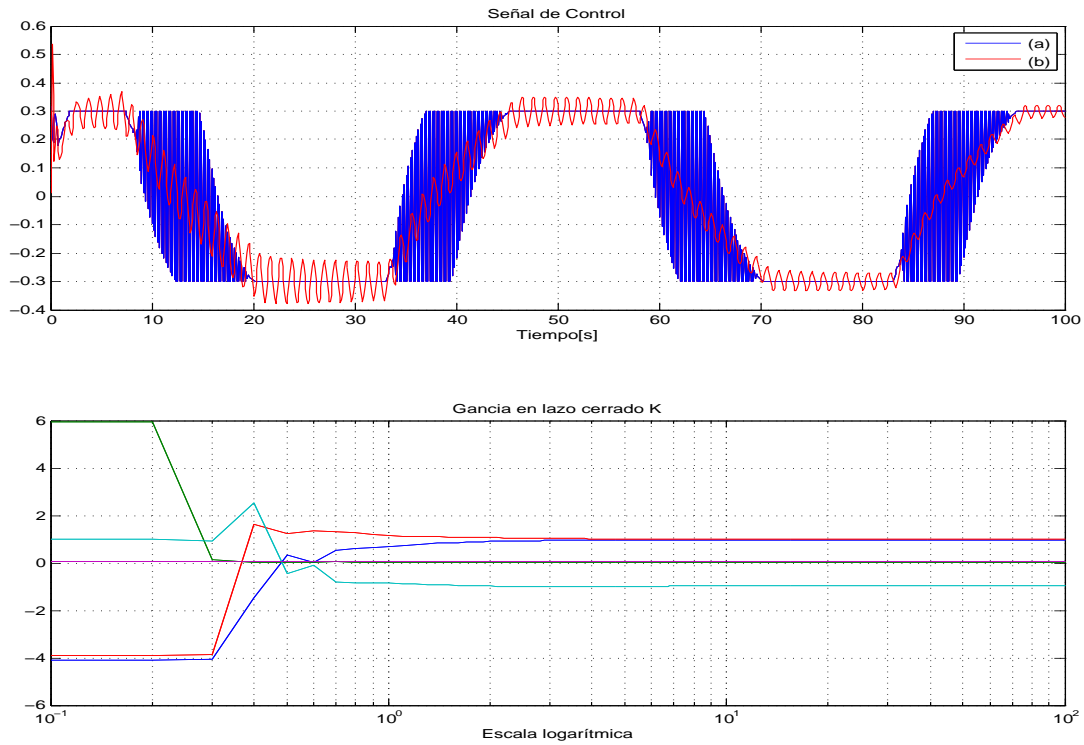


Figura 4.18: Señal de control para el controlador óptimo adaptativo por Reubicación de Polos y variación de la ganancia óptima K .

En las figuras 4.19 y 4.20 se presentan las respuestas de los controladores óptimos adaptativos con los cuales se realizó control sobre la posición y el ángulo. En la figura 4.19 se muestra la respuesta para un controlador por Reubicación de Polos por espacio de estados con el que se hace control óptimo sobre todas las variables del sistema y adicionalmente se tiene un controlador polinomial adaptativo por Reubicación de polos en lazo directo para la regulación del ángulo. En la figura 4.20 se observa la respuesta del controlador óptimo con acción integral y con penalización adaptativa de la matriz Q sobre la posición y el ángulo.

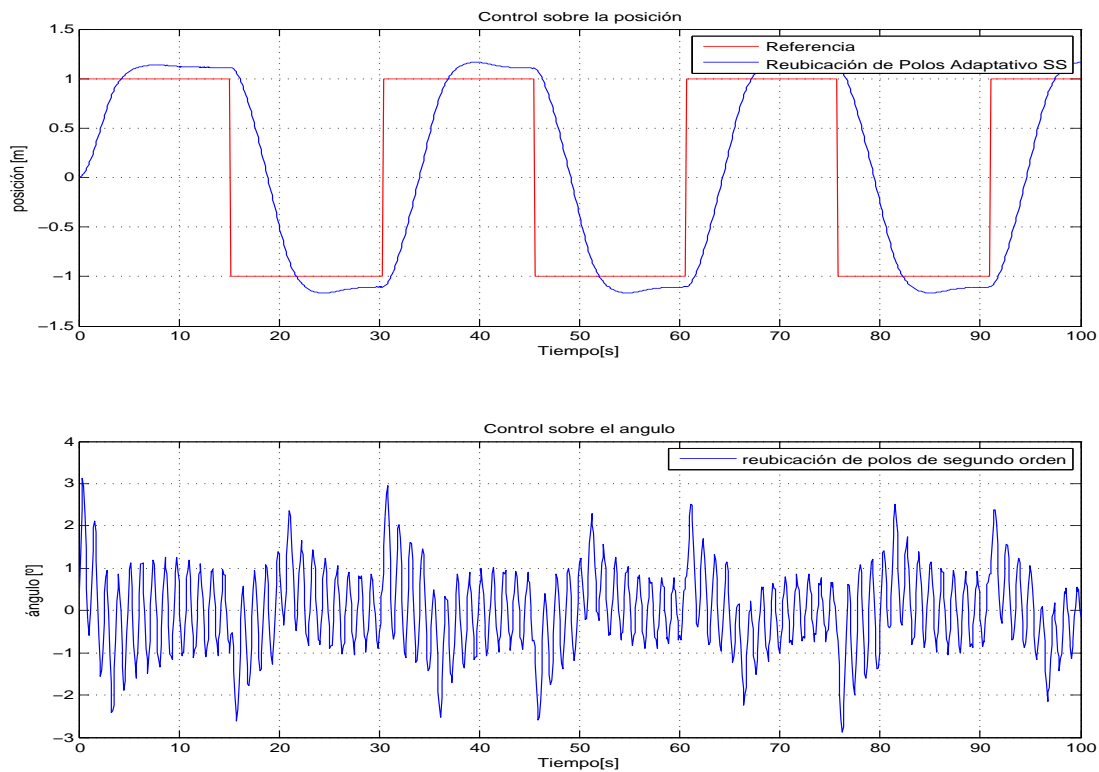


Figura 4.19: Respuesta del controlador óptimo adaptativo por Reubicación de Polos para la posición y el ángulo.

La respuesta para el enfoque de la ganancia de realimentación obtenida a partir de la caracterización adaptativa del sistema figura 4.19, aunque se presenta un error de estado estacionario que podría solucionarse con una adecuada selección de polos, la posición sigue la referencia y el ángulo oscila muy cercano a cero.

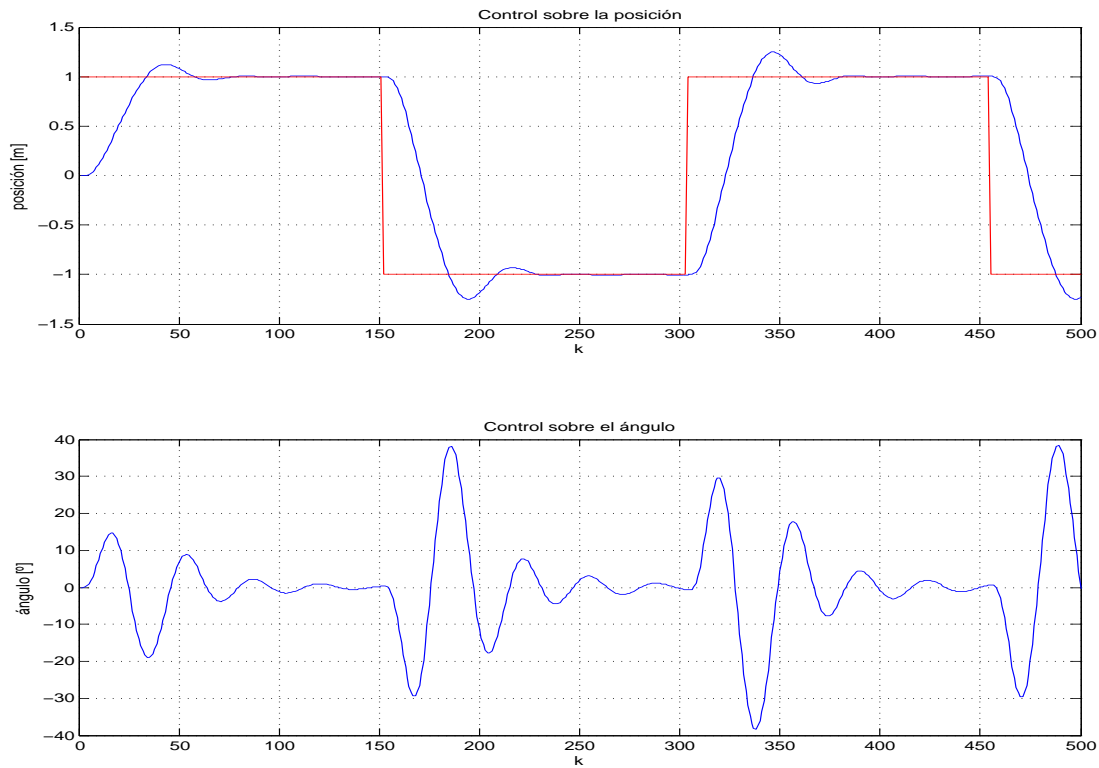


Figura 4.20: Respuesta del controlador óptimo adaptativo con acción integral para la posición y el ángulo.

Dadas las características del sistema se puede observar un comportamiento similar para la respuesta del ángulo tanto en la figura 4.19 y figura 4.20 donde se presentan perturbaciones debidas a los cambios de la referencia. En la respuesta para el enfoque de la penalización adaptativa mediante la matriz Q en la figura 4.20, logra regularse el ángulo después del tiempo de establecimiento. Cabe aclarar que solo se penalizaron la posición y el ángulo de manera adaptativa ($1/\text{error}$) dado que era el objeto de estudio de este trabajo. Por lo que se infiere de los resultados anteriores podría lograrse una mejor regulación para el ángulo si se penalizaran las demás variables de estado.

4.6. Resultados de la implementación sobre la planta

La obtención de resultados de los siguientes controladores, se hizo mediante la implementación experimental sobre la planta puente grúa del controlador por acción integral con caracterización fija y para el controlador por reubicación de polos con caracterización adaptativa para el control sobre una variable de estado.

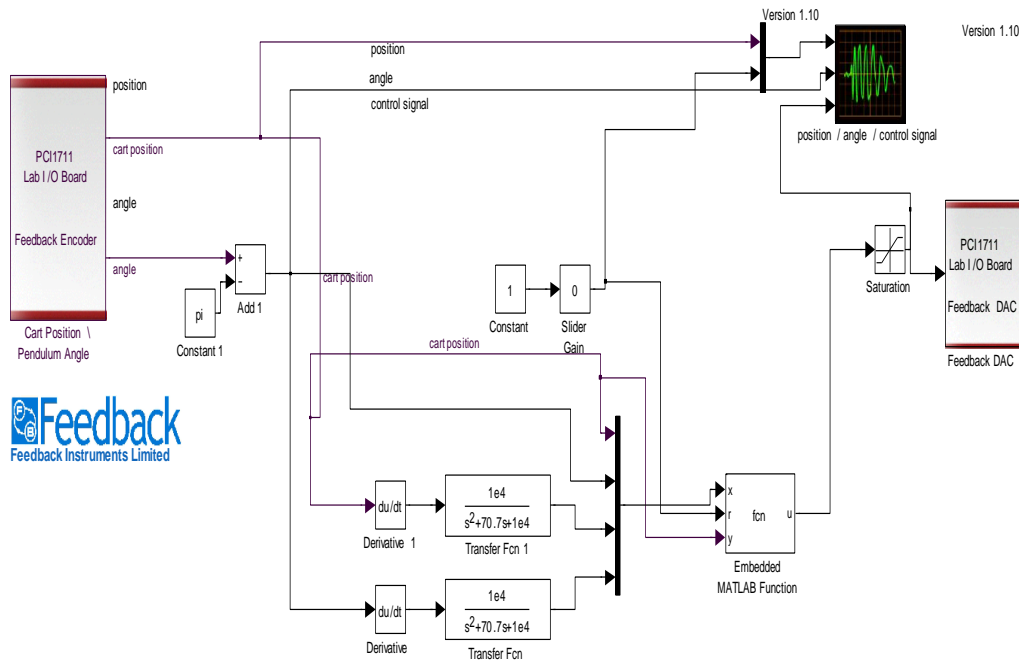


Figura 4.21: Diagrama de bloques en Simulink para realizar control sobre la planta real.

En la figura 4.22 se presentan las respuestas para los controladores Acción integral fijo de tercer orden, y Reubicación de Polos polinomial adaptativo de cuarto orden, para control sobre la posición frente a una señal de referencia escalón. La respuesta del controlador adaptativo frente a la del controlador fijo, alcanza en menor tiempo la referencia con mayor sobrepaso debido a la rápida respuesta y a la inercia que opone el movimiento del carro. En consecuencia la apertura del ángulo es mayor que la del controlador por acción integral, debido a su lenta respuesta frente al impulso.

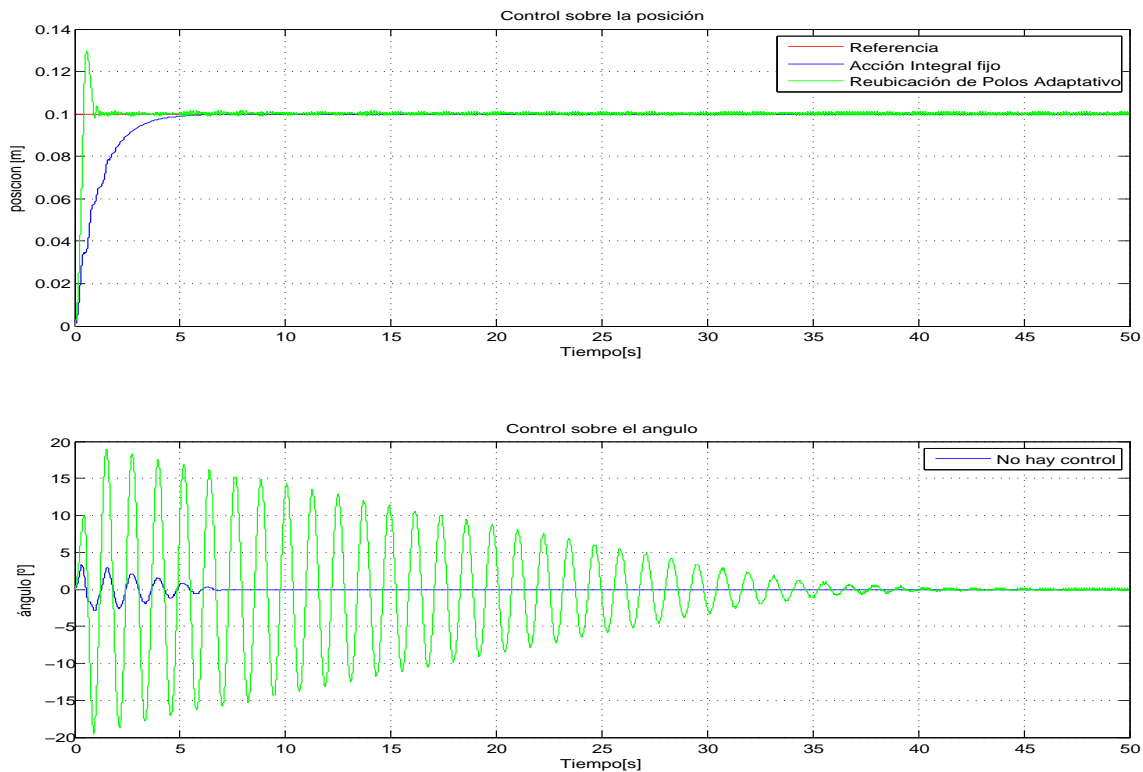


Figura 4.22: Respuesta frente a un impulso de los controladores implementados en planta para control sobre posición.

En la figura 4.23 se presentan las respuestas para una señal de referencia sinusoidal, a diferencia de la respuesta frente al escalón el de reubicación de polos adaptativo sigue plenamente la referencia sin introducir mayores perturbaciones en el ángulo. El controlador por acción integral presenta un mayor tiempo de establecimiento y no alcanza la referencia, debido a esto se introducen perturbaciones en el ángulo.

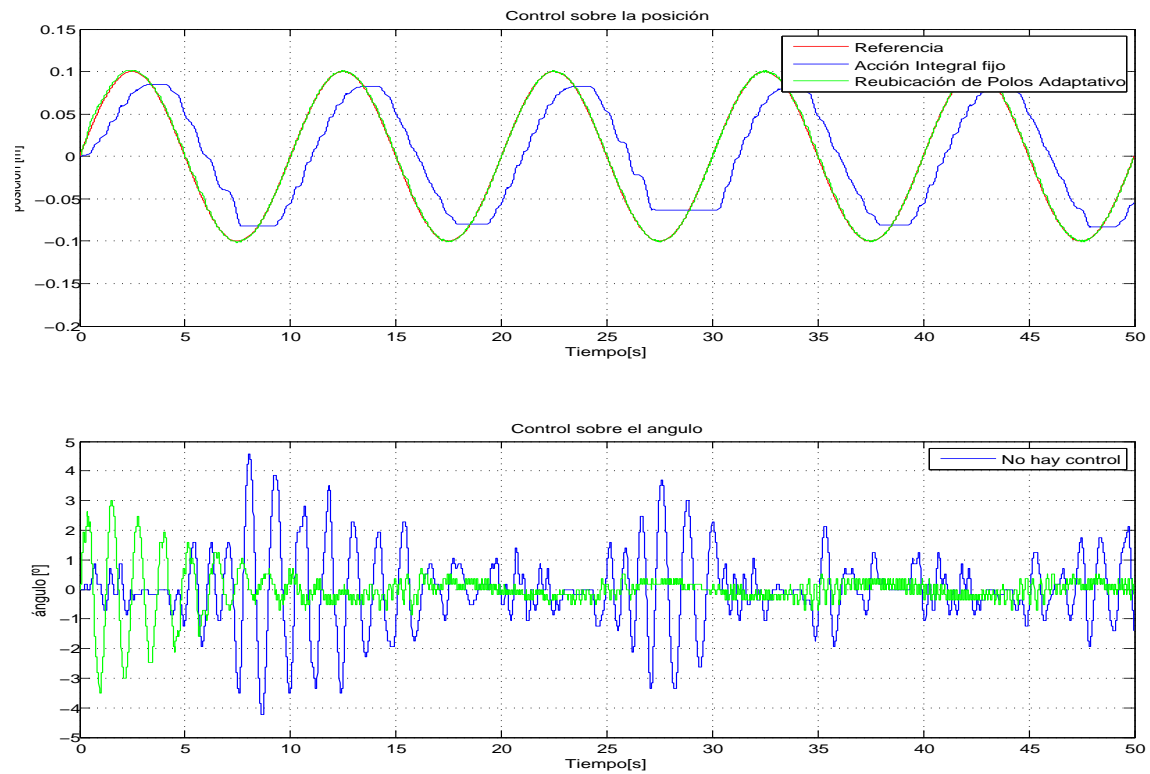


Figura 4.23: Respuesta frente a una señal sinusoidal de los controladores implementados en planta para control sobre posición.

En la figura 4.24 se presentan los parámetros obtenidos del sistema de manera adaptativa con distintas inicializaciones, con el objetivo de mostrar que convergen a valores similares durante el tiempo de estimación.

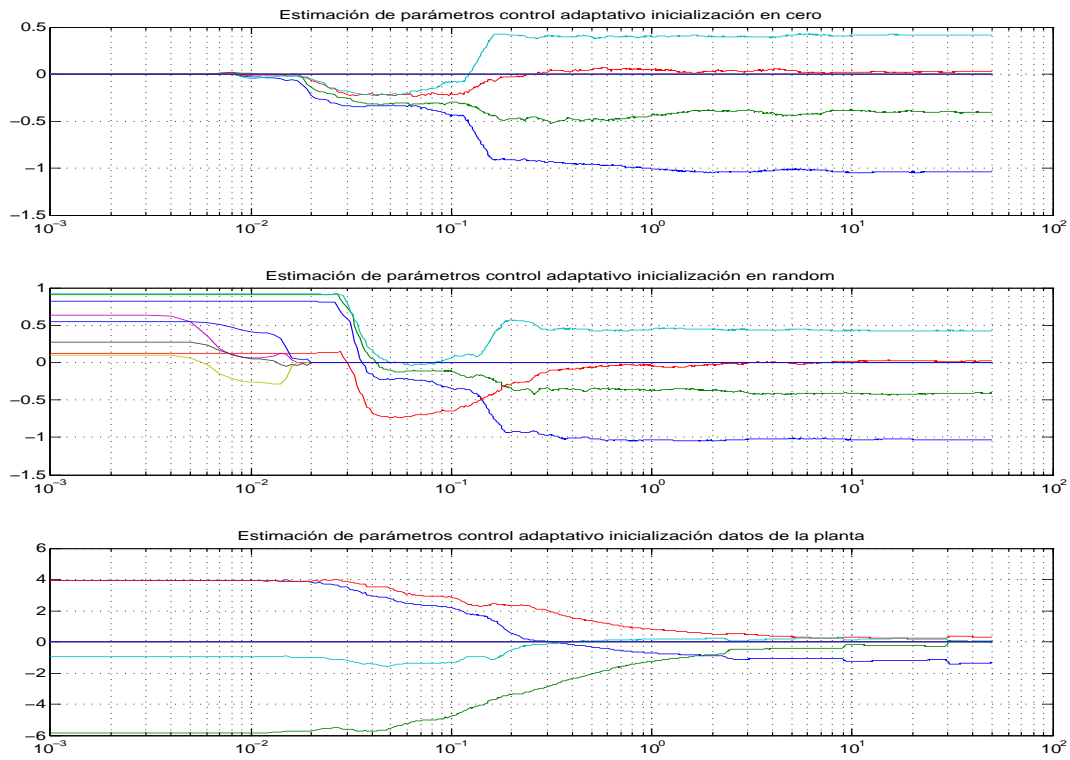


Figura 4.24: Parametros estimados en linea, para inicialización del vector theta en cero, random y con datos de la planta respectivamente

En las figuras 4.25 y 4.26 se presentan las respuestas de los controladores por reubicación de polos de cuarto orden para posición y de tercer orden para el ángulo. En la figura 4.25 puede observarse la supresión de la perturbación del ángulo que presenta el mismo controlador sin control sobre el ángulo, en consecuencia de esto su respuesta es más lenta siguiendo la referencia con un tiempo de retraso, para mostrar que si se hace control sobre el ángulo, en la figura 4.26 se generan perturbaciones a los 15 y a los 33 segundos directamente sobre el péndulo, la perturbación más notable ocurre a los 33 segundos y se logra suprimir en un periodo muy corto de tiempo.

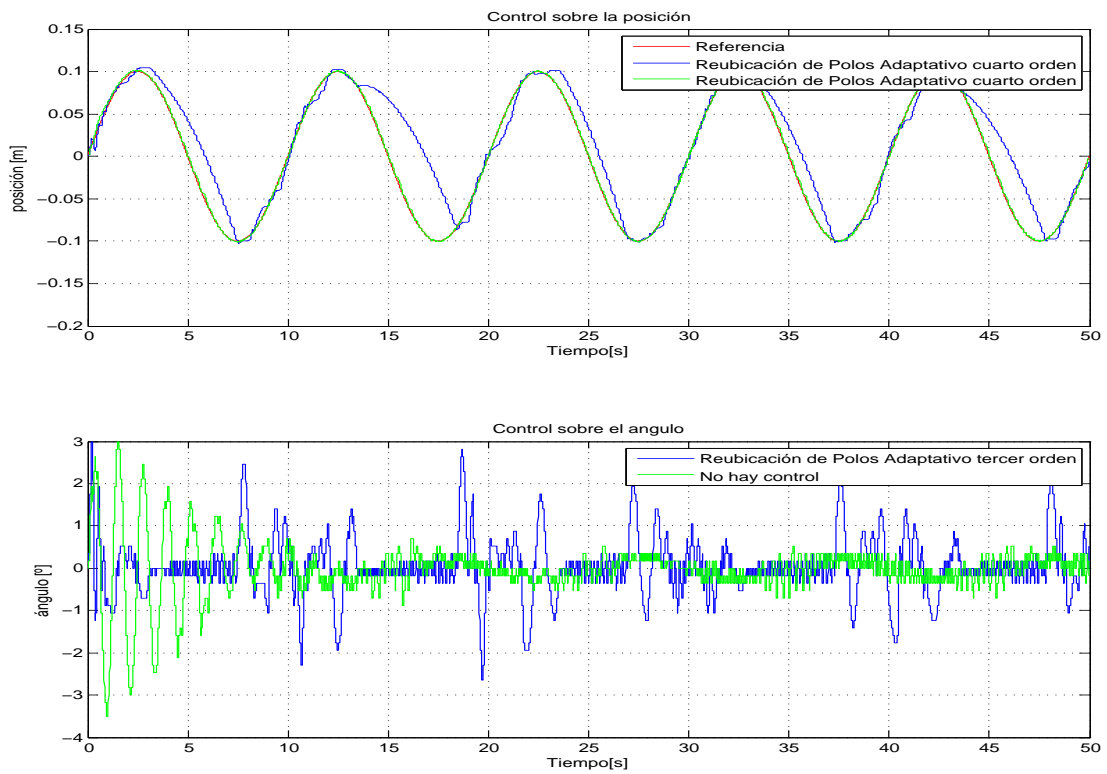


Figura 4.25: Respuesta frente a una señal sinusoidal de los controladores implementados en planta para control sobre posición y ángulo.

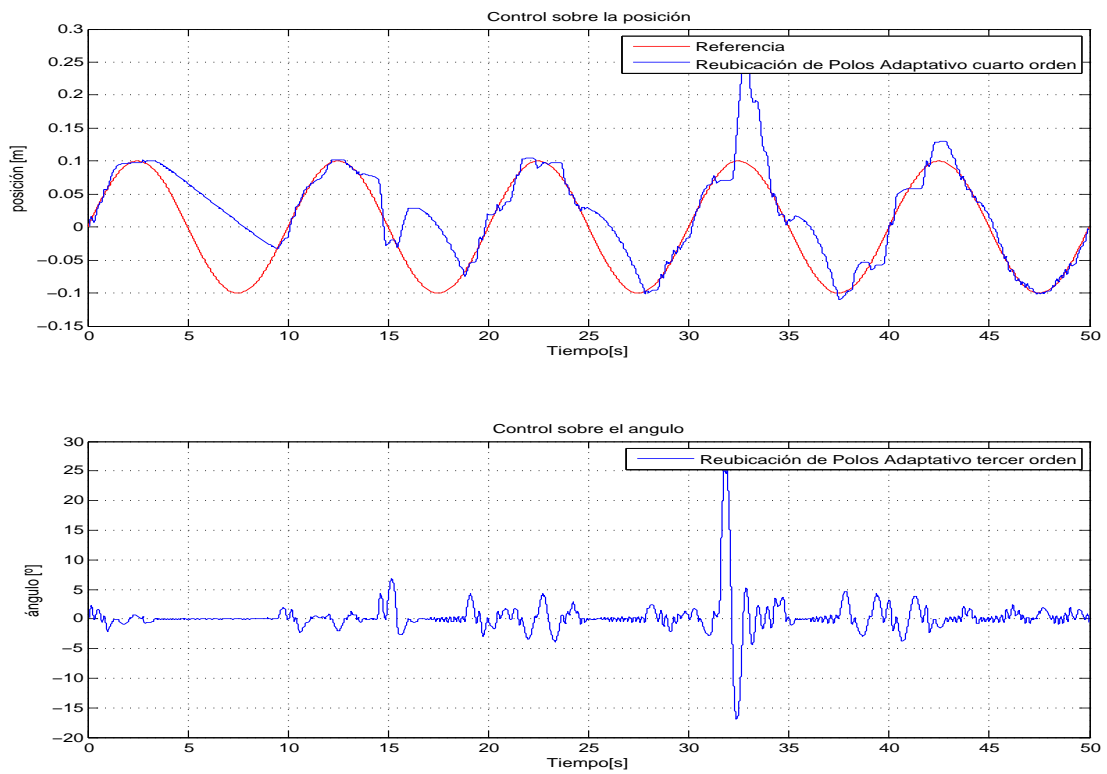


Figura 4.26: Respuesta de los controladores reubicación de polos de cuarto y tercer orden frente a fuertes perturbaciones introducidas manualmente.

5. CONCLUSIONES

- ♣ Se realizaron diferentes metodologías para la caracterización del sistema en espacio de estados en tiempo discreto, inicialmente se hizo la descripción del modelo matemático a través de las leyes físicas y las especificaciones del sistema dadas por el fabricante, obteniendo así un modelo matemático fijo no lineal (1.1) y (1.2), que luego se linealizó alrededor de un punto de operación usando series de Taylor, para obtener la primera representación del sistema en espacio de estados (1.6) y (1.7). Posteriormente se hace la caracterización de la planta fuera de línea para un modelo de tercer orden como se describe en las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.15). Por último se utilizó el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo para la identificación en línea de sistema en tiempo discreto. De las tres caracterizaciones la mejor representación del sistema, es la obtenida a partir del algoritmo de identificación.
- ♣ Las facilidades e importancia que tuvo el entorno visual de SIMILINK y el entorno grafico V-Realm Builder, para la simulación de la planta y los controladores. Ya que permitieron el análisis de los respuestas de los controladores diseñados. El hecho de que sea un modelo ajustable representa ventajas para el diseño de prototipos de controladores puesto que no se consideran perturbaciones externas, como fallos en la planta, desajustes mecánicos o ruido externo.
- ♣ De los resultados obtenidos en simulación, para control de la posición y el ángulo de manera fija y adaptativa, se puede concluir que los adaptativos presentaron mejor respuesta que los fijos, lo que resulta apenas normal, ya que los fijos se diseñaron a partir del modelo matemático; y los adaptativos se diseñaron a través de algoritmos de identificación en línea.
- ♣ El diseño de un controlador requiere del conocimiento de los polos del sistema, y de la correcta selección del orden del sistema a controlar, no siendo objeto de este trabajo el criterio para la escogencia de los polos, fue a criterio del diseñador donde la respuesta fue la más adecuada. El orden del sistema se conocía de trabajos anteriores [2]. Como trabajo futuro se invita a plantear a una metodología para la obtención adecuada de los polos para un sistema dentro del algoritmo de caracterización.
- ♣ Para la inicialización del sistema se recomienda iniciar los parámetros del vector theta en valores conocidos de la planta como los parámetros del modelo

matemático, o hacer una identificación fuera de línea antes de iniciar el algoritmo de identificación con el propósito de que los nuevos parámetros obtenidos no se encuentren muy alejados de los valores reales de la planta, eliminando posibles perturbaciones que se puedan presentar al instante de hacer control.

- ♣ La aplicación de los controladores puede variar dependiendo de su finalidad, como se ve en los resultados los controladores ofrecen diferentes características en su respuesta o al variar las condiciones de la referencia, como se evidencia para el caso en donde Se demuestra experimentalmente que al variar la frecuencia de la señal de seguimiento, los controladores alcanzan la referencia ver figura 4.17.
- ♣ El modelo matemático fijo del sistema se construye a partir de las características dadas por el fabricante en el manual, y de las consideraciones y aproximaciones tenidas en cuenta durante el desarrollo de las leyes físicas que puedan regir al sistema, motivo por el cual la desviación de las propiedades de la planta que puedan cambiar con el tiempo no son consideradas. Por lo tanto se requiere de una obtención de los parámetros que describan al sistema independiente del estado o condiciones de la planta. Para dar solución a este tipo de particularidades se propone caracterizar la planta en línea, mediante algoritmos de identificación adaptativos.
- ♣ Los controladores polinomiales se diseñan a partir de la función de transferencia de la variable de estado a controlar, se puede entonces obtener una ley de control para cada variable de estado con el fin de obtener un control del sistema completo a partir de la suma de las señales de control. Este tipo de controladores resulta ser muy útil para sistemas acoplados considerando cada subsistema como un sistema independiente, donde se hace necesario el control por separado y acoplándose nuevamente en la ley general de control.
- ♣ Se recomienda el uso de controladores autosintonizados en una aproximación descentralizada (Controlador con dos grados de libertad) para asegurar el curso de las variables de estado controladas y el uso de sistemas supervisores entre dichos controladores, se debe considerar la desventaja de la aproximación del control descentralizado para sistemas simétricos (igual número de entradas y salidas).
- ♣ Un controlador por espacio de estado, tiene en cuenta todas las variables del sistema y su ley de control actúa integralmente sobre la planta. El observador de estados obtiene una estimación de las variables de estado incluyendo las que no se pueden medir directamente. Para el desarrollo de la ley de control se calculan las ganancias, que multiplicadas por las variables de estado observadas, realizan el control del sistema. Los resultados en simulación

sugieren que la inclusión de un control polinomial sobre una de las variables de interés puede mejorar la respuesta de un controlador por espacio de estados.

- ♣ Considerar todas las relaciones existentes entre las variables de estado del sistema dentro de la matriz Q , permite una mejor aproximación a la respuesta óptima esperada.
- ♣ Se lograron satisfactoriamente los objetivos planteados para este trabajo grado, realizar control óptimo adaptativo para un sistema multivariable, diseñando diferentes tipos de controladores y utilizando algoritmos de identificación en línea sobre la planta. También se logro obtener la ganancia K óptima adaptativa con dos enfoques diferentes: haciendo adaptativa la representación de la planta y haciendo adaptativa la matriz Q .

BIBLIOGRAFÍA

- [1] <http://www.centroaceros.com/Puentesgrua/ArticuloCalidadPuenteGrua.aspx>
- [2] C. Betancur, and L. Tafur. “*Sintonización de un Control Optimo Cuadrático con Computación evolutiva para un Puente Grúa*”. MEE. E. Giraldo, Pregrado [tesis], Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, 2008.
- [3] V. Bobál; J. Böhm; J.Fessl, and J. Machácek, *Digital Self-tuning Controllers, Algorithms, Implementation and Application*. Advanced textbooks in control and signal processing. Springer, 2005.
- [4] D. Giraldo, & E. Giraldo,(2012) *Teoría de Control Digital*. Universidad Tecnológica de Pereira, Editorial promedios, 2012.
- [5] K. Ogata, *Sistemas De Control en Tiempo Discreto*, segunda ed. Prentice Hall Hispanoamérica.1996.
- [6] K. Astrom, & B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Prentice Hall, 1994.
- [7] D. Rodríguez, “*Implementación de Bloques de Simulink para Control Adaptativo de un Motor de Corriente Continua*”. R.Barber, & S. Garrido Pregrado [tesis], Universidad Carlos III de Madrid,Escuela Politécnica Superior, Leganés 2012.
- [8] “Introducción al control adaptativo”. <http://www.slideshare.net/balzasbravas/controladaptativo>. Fecha de consulta: 25 de junio del 2014.
- [9] S. Garrido, “*Identificación, Estimación y Control de Sistemas No-Lineales mediante RGO*”. Dr.L.Moreno, & Dr.C.Balanguer Pregrado [tesis], Universidad Carlos III de Madrid,Escuela Politécnica Superior, Leganés 1999.
- [10] D. Giraldo, & I. Tabares, *Teoría de Control*. Universidad Tecnológica de Pereira, Programa de Ingeniería Eléctrica. 1997.
- [11] R. Bellman, *Adaptive Control – A guided Tour*. Princeton University Press, 1961.
- [12] D. Giraldo, & E. Giraldo; “*Control por Realimentación de Variables de estado usando un Observador Adaptativo de Estados*”. Revista Scientia et Technica, vol. 8, No.35, Universidad Tecnológica de Pereira, 2007.

- [13] G. Goodwin, & K. Sang; *Adaptive Filtering, Prediction and Control Deterministic*. Prentice Hall, INC, 1984.
- [14] C. A. Saldarriaga, and J. Henao “*Identificación de parámetros y control de un péndulo invertido*”. MEE. D. Giraldo- Pregrado [tesis], Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, 2009
- [15] Digital pendulum-Control Experiments Manual:33-935/936-1v60.Ed 04, Feedback Instruments Ltd,Crowborough, 2002.
- [16] K.Áström, & T. Höggund,(1995)*PID Controllers: Theory,Design, and Tuning*, 2nd Edition.
- [17] <ftp://ftp.unicauca.edu.co/Facultades/FIET/DEIC/Materias/Nolineales>
- [18] <http://www.estrucplan.com.ar/Producciones/entrega.asp?IdEntrega=1087>
- [19] <http://www.depeca.uah.es/depeca/repositorio/asignaturas/32328/Tema5.pdf>
- [20] E. Benedicto, “*Identificación de sistemas en Lazo Cerrado con Estructura tipo CLOE*”. Ph.D. V. Alvarado, Maestría [tesis], Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, México 2007.
- [21] E. Franco, J. Martínez & H. Calero; “*Controlador Self-Tuning: Aplicado a Control de Procesos con Dinámicas Altamente Variables*”. Revista Ciencia y Tecnología, vol. 1, No.2, 1998.
- [22] <http://www.deio.urjc.es/controloptimo.html>
- [23] <http://gama.fime.uanl.mx/salinas/apuntes1.pdf>

A. FUNDAMENTOS DE CONTROL DIGITAL

A.1. Transformada Z

El método de la *transformada Z* es particularmente útil para analizar y diseñar sistemas de control en tiempo discreto, lineales e invariantes en el tiempo, de una entrada y una salida. La principal ventaja del método de la transformada z , es que está habilita al ingeniero para aplicar métodos de diseño convencionales de sistemas en tiempo discreto que pueden ser en parte en tiempo discreto y en parte en tiempo continuo.[5]

A.1.1. Definición de la transformada Z

La transformada Z se define como:

$$z = e^{hs} \quad (\text{A.1})$$

entonces

$$s = \frac{1}{h} \ln(z) \quad (\text{A.2})$$

Donde s es la variable compleja de la transformada de Laplace y h es el período de muestreo. con (A.1) en (A.2):

$$U * \left(s = \frac{1}{h} \ln(z) \right) = U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kh) * z^{-k} \quad (\text{A.3})$$

$$U(z) = Z[u * (t)] = \mathcal{L}[u * (t)]|_{s=\frac{1}{h} \ln(z)} \quad (\text{A.4})$$

La mayoría de textos en control digital contienen tablas con las transformadas Z de las funciones más comúnmente usadas en el análisis de sistemas. En general la transformada Z de funciones más complejas se obtiene con la ayuda de algunos teoremas.[4]

A.2. Controlabilidad

La *controlabilidad* se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado a un estado arbitrario. Un sistema es controlable si se puede, mediante un vector de control no acotado, transferir dicho sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado, en un numero finito de periodos de muestreo.[5]

El estado $x(n)$ puede ser transferido a un estado deseado arbitrario en el instante, donde n es el orden del sistema, dado por:

$$x(n) = \phi^n x(0) + \phi^{n-1} \Gamma u(0) + \dots + \Gamma u(n-1) = \phi^n x(0) + W_c U \quad (\text{A.5})$$

Donde

$$W_c = [\Gamma \phi \Gamma \phi^2 \Gamma \dots \phi^{n-1} \Gamma] \quad (\text{A.6})$$

Se dice que si la matriz W_c , conocida como la matriz de controlabilidad tiene rango n , entonces es posible hallar n ecuaciones de las cuales las señales de control se pueden encontrar de modo que el estado inicial es transferido al estado final deseado.[4]

A.3. Observabilidad

La *observabilidad* se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de períodos de muestreo.[5] Un sistema es observable si a partir de las señales de entrada y salida existe un valor finito K suficiente para determinar el estado inicial del sistema.

Considérese el siguiente sistema:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (\text{A.7})$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Asumiendo que $u(k) = 0$ y $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ son dados, se tendrán las siguientes ecuaciones:

$$y(0) = Cx(0) \quad (\text{A.8})$$

$$y(1) = Cx(1) = C\Phi x(0) \quad (\text{A.9})$$

$$\vdots$$

$$y(n-1) = C\Phi^{n-1}x(0) \quad (\text{A.10})$$

Usando notación vectorial:

$$\begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}$$

De la anterior ecuación se define la matriz observable como:

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

Se dice entonces que el sistema es observable y el estado $x(0)$ se puede obtener, si la matriz observable tiene rango n . [4][14]

A.4. Operadores de desplazamiento

El cálculo con el operador diferencial es una herramienta conveniente para manipular ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En el cálculo con operadores, los sistemas son vistos como operadores que mapean las señales de entrada a señales de salida. Para especificar un operador es necesario dar su rango, es decir, definir la clase de señales de entrada, y describir como actúa el operador sobre las señales.

En el cálculo con el operador de desplazamiento, todas las señales son consideradas como secuencias doblemente finitas: $\{f(k) : k = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$. El operador de desplazamiento hacia adelante se denota por q , y tiene la siguiente propiedad:

$$qf(k) = f(k+1)$$

El operador inverso al anterior es llamado operador de desplazamiento hacia atrás, o el operador de retardo y se denota por q^{-1} . Entonces

$$q^{-1}f(k) = f(k-1)$$

Es importante para el rango del operador que las secuencias sean doblemente infinitas; de otra manera, el inverso del operador de desplazamiento hacia adelante no podría existir. En discusiones de problemas relacionados a la ecuación característica de un sistema, tales como **estabilidad y orden del sistema**, es más conveniente usar el operador q . Con relación a causalidad es más conveniente usar el operador q^{-1} . El uso de operadores da descripciones compactas de sistemas y permite derivar fácilmente relaciones entre las variables del sistema ya que la manipulación de las ecuaciones de diferencia es reducida a un problema puramente algebraico. [4]

A.5. Formas canónicas para ecuaciones en el espacio de estado en tiempo discreto

Existen muchas técnicas para obtener representaciones en el espacio de estado correspondientes a sistemas en tiempo discreto [5]. Considere el sistema en tiempo discreto descrito por:

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde $u(k)$ es la entrada e $y(k)$ es la salida del sistema en el instante de muestreo k . La ecuación (A.11) se puede escribir en la forma de la función de transferencia pulso como:

$$\frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \quad (\text{A.12})$$

O bien

$$\frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (\text{A.13})$$

Existen muchas formas de llevar a cabo representaciones en el espacio de estado para el sistema en tiempo discreto descrito por (A.11), (A.12) o (A.13). Aquí se presentan las siguientes:

- Forma canónica controlable
- Forma canónica observable
- Forma canónica diagonal
- Forma canónica Jordan

A.5.1. Forma canónica controlable

La representación en el espacio de estado del sistema en tiempo discreto obtenida de las ecuaciones (A.11), (A.12) o (A.13) se puede expresar de la forma dada por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (\text{A.14})$$

$$y(k) = [(b_n - a_n b_0)(b_{n-1} - a_{n-1} b_0) \cdots (b_1 - a_1 b_0)] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (\text{A.15})$$

La representación en el espacio de estado nada por (A.14) y (A.15) se conoce comúnmente como forma canónica controlable, donde (A.14) representa el estado del sistema y (A.15) representa la salida del sistema.

A.5.2. Forma canónica observable

La representación en el espacio de estado del sistema en tiempo discreto dada por las ecuaciones (A.11), (A.12) o (A.13) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (\text{A.16})$$

$$y(k) = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (\text{A.17})$$

La representación en el espacio de estado dada por las ecuaciones (A.16) y (A.17) se conocen como *forma canónica observable*. Observe que la matriz de estado $n \times n$ de las ecuación de estado dada por la ecuación (A.16) es la transpuesta de la matriz correspondiente a la ecuación de estado definida por la ecuación (A.14).[5]

A.5.3. Forma canónica diagonal

Si los polos de la función de transferencia pulso dados por las ecuaciones (A.11), (A.12) ,(A.13) son distintos, entonces la representación en el espacio de estado se puede expresar en la forma canónica diagonal como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (\text{A.18})$$

$$y(k) = [c_1 \ c_1 \ \cdots \ c_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (\text{A.19})$$

A.5.4. Forma canónica Jordan

Si la función de transferencia pulso dada por las ecuaciones (A.11), (A.12) o (A.13) incluye un polo múltiple del orden m en $z = p_1$ y todos los demás polos son distintos, entonces la ecuación de estado y la ecuación de salida se puede expresar como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{m+1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (\text{A.20})$$

$$y(k) = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (\text{A.21})$$

La matriz de $n \times n$ está en la forma canónica Jordan.[5]